<36603751990013

<36603751990013

Bayer. Staatsbibliothek

Math. U. 62 h

R

Mathes. univ.

Förstem.

m.

Ueber den Gegensatz

positiver und negativer Größen.

Von

D. Wilhelm August Förstemann,

Lehrer der Mathematik am Gymnasium zu Danzig.

Mit zwei Kupfertafeln.

Nordhausen, 1817

bei Gottfried Wilhelm Happach.

61 D

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische Staatsbibliothek München

Vorrede.

Wenn in den neuern Zeiten die Mathematik, auch in den höhern Theilen, zu einem ungeheuren Umfange angewachsen ist, und durch die Bemühungen so vieler Mathematiker vom ersten Range eine ganz andere Gestalt gewonnen hat, als sie selbst noch vor funfzig Jahren hatte: so weiß doch jeder nicht in äußerst beschränkten Einsichten befangene Mathematiker, wie sehr viel noch zu thun übrig ist; ja es läßt sich nicht leugnen, daß selbst in den Anfangsgründen die Wissenschaft noch vieler Verbesserungen fähig ist, und daß solche Verbesserungen immer nothwendiger werden, nicht bloß zur Ausbildung der Wissenschaft an sich, sondern auch, um dadurch einen gründlichen und ausgedehntern Unterricht zu erleichtern. Von solchen An-

sichten geleitet, und frühzeitig durch innige Lust an diesen Beschäftigungen getrieben, habe ich seit mehreren Jahren angestrengt an einer eigenthümlichen Behandlung der Elemente der reinen Mathematik, besonders der Geometrie, gearbeitet, um dadurch zu jenem Zwecke das Meinige beizutragen; und, täusche ich mich nicht gänzlich, so bin ich darin nicht ganz unglücklich gewesen. Noch ist es aber zu früh, von meinen Resultaten Rechenschaft abzulegen. Ein so wichtiges und kitzliches Geschäft darf nur behutsam betrieben werden. Vorzüglich ist es dabei gefährlich, die Sache aus einem hohen, aber der Mathematik fremden Gesichtspuncte anzusehen, und, statt einer festen Begründung der Mathematik aus sich selbst, leere Speculationen zu geben, die desto überflüssiger sind, je mehr sie auf falscher Anwendung der Philosophie beruhen. Ueberhaupt ist zu wünschen, daß nicht zu Viele einem solchen Geschäfte sich widmen mögen; aber doch muß Jedem, der sich hiezu berufen fühlt, das Recht bleiben, das Seinige zu versuchen;

und immer wird ja Einseitigkeit in der Wissenschaft am besten durch Beleuchtung von mehreren Seiten vermieden.

Die Lehre vom Positiven und vom Negativen ist einer der am ötersten besprochenen Gegenstände der reinen Mathematik. Sie hat oft Widersprüche erfahren, zwar meistens von Leuten, deren Kenntnisse sich nicht viel weiter erstreckten, als gerade bis auf etwas aus dieser Lehre; aber dennoch hat sie auch nicht selten von geschicktern Mathematikern theilweise Verdrehungen erlitten. Eine genaue, lebendige Einsicht in diese Lehre ist in der ganzen Mathematik unentbehrlich; aber gerade diese Einsicht ist nicht gar leicht zu erwerben, da die Lehrbücher diesen Gegenstand meistens sehr oberflächlich behandeln, oder doch nur sehr kurz abfertigen. Und allerdings ist immer eignes Studium am geeignetsten, solchen Einsichten Umfang, Deutlichkeit und Lebendigkeit zu verschaffen; dennoch sollte man sich bemühen, auch Anfängern durch erweiterte und verbesserte Behandlung dieses Gegenstandes das Eindringen in

denselben, so viel als möglich, zu erleichtern.

Diese Lehre von den entgegengesetzten Größen nun ist gerade der Gegenstand des gegenwärtigen Werkes. Es ist meine Absicht, hier Rechenschaft abzulegen von dem Hauptsächlichsten, das ich hierin gefunden. Diese Schrift soll also kein ausführliches erschöpfendes Lehrbuch seyn; sie ist auch nicht eigentlich für den Unterricht geschrieben. Einige mathematische Kenntnisse werden freilich schon vorausgesetzt, um sie verstehen zu können. Sie möchte aber doch Solchen, welche die erforderlichen Kenntnisse besitzen, auch wol nützlich seyn können, um ihre Einsichten in jene Gegenstände zu erweitern. Schwerlich würde ich gerade hiemit zuerst aufgetreten seyn, hätte mir nicht kürzlich das Studium von Carnot's Géométrie de Position dazu den Anstoß gegeben; ein Werk, das zwar viele Belehrung gewährt, aber doch auch zeigt, wie so leicht die Lehre von den entgegengesetzten Größen mißverstanden werden könne, wie selten hier deutliche und in rich-

tigen mathematischen Grundbegriffen fest begründete Einsichten seyen, und wie nützlich also die Mittheilung verschiedenartiger Ansichten werden könnte, welche nach festerer Begründung streben. Uebrigens ist jenes Werk von Carnot das einzige, was bei Abfassung dieser Schrift berücksichtigt wurde. Zwar gibt es schon manche Schriften über jenen Gegenstand, selbst deutsche, aber schon der Kürze halber schien es mir zweckmäßig, mich nicht auf die Vergleichung meiner Ansichten mit denen Andrer einzulassen, und so desto leichter eine wünschenswerthe Selbstständigkeit zu erreichen.

In gegenwärtigem Werke sind wenige Bemerkungen über einige Grundbegriffe der reinen Mathematik vorausgeschickt. Zuerst wird aufmerksam gemacht auf den in der Sprache dieses Werkes beobachteten Unterschied zwischen Größe und Zahl. Ich habe mich schon lange an diese Unterscheidung gewöhnt, nur glaube, daß gerade hiedurch eine Deutlichkeit der Einsichten befördert wird, welche sie außerdem nicht leicht erreichen möch-

ten. Ich gestehe zwar gern, daß man auch bei vieldeutigen Benennungen genaue Vorstellungen haben könne, und glaube, daß jeder in seine Wissenschaft eingedrungene Mathematiker diesen Unterschied zwischen Größe und Zahl der Sache nach gewiß einsieht und annimmt, wenn er auch nicht gerade diese strenge Unterscheidung der Benennungen sich zum Gesetze macht, sondern nach alter Sitte dem Worte Größe einen viel weitern Sinn beilegt, und damit selbst jeden Zahlausdruck bezeichnet; ja ich gestehe selbst, daß der Gebrauch des Wortes Größe in diesem weitern Sinne manches Bequeme hat, besonders bei Sätzen, welche von eigentlichen Größen eben so, wie von Zahlen gelten. Dennoch scheint es mir im höchsten Grade zweckmäßig, zum wenigsten in elementaren Schriften, jenen Unterschied auch durch Unterscheidung der Worte genau zu bezeichnen. Wem diese ganze Bemerkung, als sehr klar und deutlich, zu unbedeutend scheinen möchte, dem zeige das Beispiel Carnot's (siehe Anhang I.), wie leicht jener Unterschied übersehen werden kön-

ne, und wie sehr es also Noth thue, auf ihn recht aufmerksam zu machen. — Es wird übrigens hoffentlich nicht anstößig seyn, daß der Titel gegenwärtiger Schrift sich nach dem gewöhnlichen mathematischen Sprachgebrauche bequemt hat.

Auch das über die Eintheilung der Geometrie in 3 Theile mit Aufstellung eines neuen ersten Haupttheils Gesagte halte ich für mein Eigenthum. Sollte auch die Sache an sich nicht ganz neu seyn, so ist sie doch schwerlich schon je so bestimmt ausgesprochen, noch weniger in den systematischen Vortrag der Geometrie aufgenommen. Und doch scheint mir die strenge Beobachtung dieser Eintheilung von weit höherer Wichtigkeit zu seyn, als eine oberflächliche Betrachtung vermuthen lassen möchte, worüber mehr zu sagen hier nicht der Ort ist. Uebrigens lege ich nur vielen Werth auf die Sache, weniger auf die vorgeschlagenen Benennungen jener Theile.

Der erste Abschnitt hat die bloß arithmetische Theorie des Gegensatzes positiver

und negativer Größen und Zahlen zum Gegenstande. Er beginnt mit einer Betrachtung dieses Gegensatzes an bloßen Zahlen, durch Vergleichung mit einem andern Gegensatze, der für die Multiplication und Division eben das ist, was der Gegensatz des Positiven und des Negativen ist für die Addition und für die Subtraction. Hierin liegt der Grund für die Benennungen Additions-Gegensatz und Multiplications-Gegensatz. Die Bildung dieser Worte ist vielleicht nicht die glücklichste, aber bessere boten sich nicht dar, die ganz dasselbe bezeichnet hätten, was diese bezeichnen sollen. Es gibt sonst in der Arithmetik keine besondre Lehre vom Multiplicationsgegensatze; sie dringt sich auch nicht so sehr auf, wie die Lehre vom Additionsgegensatze. Der Multiplicationsgegensatz spricht sich an der eigentlichen Größe der Zahlen aus, ganz anders als der Additionsgegensatz, und hat daher nichts Räthselhaftes, das vieler Erläuterungen bedürfte. Dennoch glaube ich, gerade in der Betrachtung des Multiplicationsgegensatzes viel Licht für die Lehre

vom Additionsgegensatze zu finden. Erst nachdem der Additionsgegensatz an bloßen Zahlen so weit erläutert worden, wie er es nach dieser anfänglichen beschränkten Ansicht werden kann, wird auch dieser Gegensatz bei Größen untersucht. Dieser Gegenstand ist mit Kürze behandelt; philosophische Speculationen, die am Ende meistens zu nichts führen, sind ganz vermieden.

Der zweite Abschnitt enthält die Grundlehren für die Anwendung des Additionsgegensatzes in der Geometrie. Das Eigenthümliche in dieser Darstellung wird man leicht erkennen. Die leicht zu findende Regel für die Summe von zwei Linien, worin die eine den Endpunct der andern zum Anfangspuncte hat (§. 14. II.), und ihre Ausdehnung auf Winkel (§. 16.) verdient gewiß, wo sie hin gehört, angewandt zu werden, und dient oft zu nicht unbedeutender Erleichterung.

Der dritte Abschnitt soll zeigen, wie der Additionsgegensatz bei Anwendung der Algebra in der Geometrie gebraucht werden

kann. Es ist ganz unmöglich, diesen Gegenstand in Wenigem zu erschöpfen, und auch ich glaube nichts weniger als ihn erschöpft zu haben. Es ist dieser Gegenstand auch vorzüglich durch viele Beispiele erläutert worden, und zwar an Aufgaben, die, wenn ich mich nicht täusche, gerade in dieser Hinsicht sehr interessant und lehrreich sind. Durch Aufstellung und genaue Behandlung dieser Beispiele glaube ich aber nützlicher geworden zu seyn, als wenn ich, mit Vernachlässigung solcher Beispiele, eine Menge von Regeln aufgestellt hätte, die den Schein der Richtigkeit und Vollständigkeit, aber auch vielleicht nur den Schein, an sich trügen. Es läßt sich sicher gerade hier ohne Betrachtung solcher Beispiele nichts leisten. Auch hoffe ich, durch dieselben Anfängern der Mathematik nützlich zu werden, die sich darin festsetzen wollen. Einige Bekanntschaft mit der Algebra ist freilich vorausgesetzt, wenigstens bis zur Theorie der quadratischen Gleichungen, doch sind die algebraischen Rechnungen immer mit einer gewissen Ausführlichkeit gege-

ben worden, so daß es Anfängern nicht schwer seyn möchte, ihnen nachzufolgen.

Der vierte Abschnitt enthält eine gedrängte Uebersicht der Grundsätze für die Anwendung des Additionsgegensatzes in der Trigonometrie. Absichtlich ist dieses Capitel sehr kurz behandelt worden. Es ist mir darin besonders die ungewöhnliche Construction der Secanten und Cosecanten an der zur Erläuterung der trigonometrischen Functionen gebräuchlichen Figur eigenthümlich. Diese Constructionsart ist wol ohne Zweifel sehr zweckmäßig; denn wenn die übrigen Functionen als Stücke unveränderter gerader Linien, Scalen, dargestellt werden, wodurch sich ihr Additionsgegensatz so sehr verdeutlicht, soll man nicht auch suchen, die Secanten und Cosecanten auf ähnliche Weise darzustellen?

Hierauf folgen zwei Anhänge. Der erste spricht meine Meinung über die Ansichten Carnot's aus, welche er in seiner Geométrie de Position bekannt gemacht hat. Ich wünsche sehr, hiebei nicht mißver-

standen zu werden. Ich spreche bloß gegen die Grundlage seines Werkes. Dieß verstößt wol nicht gegen die Achtung, welche ich seinem Verfasser, als tüchtigem Mathematiker, schuldig zu seyn glaube.

Der zweite Anhang behandelt die interessante Aufgabe, aus den gegebenen Höhen eines Dreiecks seine Seiten zu finden. Ich hatte die mitgetheilte Auflösung vor nicht langer Zeit gefunden, und da mir sonst nirgends eine Auflösung dieser Aufgabe aufgestoßen war, so hielt ich es nicht für überflüssig, die gefundene hier mitzutheilen, so leicht sie auch an sich ist.

Gerade aber, indem ich dieses schreibe, blättere ich in der trefflichen Sammlung geometrischer Aufgaben von Meier Hirsch, ob sich nicht daselbst eine Auflösung dieser Aufgabe finde, und stoße auch endlich glücklich S. 239 des ersten Theils auf dieselbe. Bald lehrt mich aber die Ansicht der Formeln, daß sie fehlerhaft sind, und ich finde den Grundfehler, aus dem die übrigen entspringen, in der letzten Formel auf S. 239,

wo im Nenner des vor dem Wurzelzeichen stehenden Bruches $4ac$ steht, statt $4a^2c^2$. Hieraus folgt

statt $\triangle ABC = \frac{x^2\sqrt{k}}{4ac}$, als richtig $\frac{x^2\sqrt{k}}{4a^2c^2}$

statt $x = \frac{2abc}{\sqrt{k}}$, $\frac{2a^2bc^2}{\sqrt{k}}$.

statt $y = \frac{2b^2c}{\sqrt{k}}$, $\frac{2ab^2c^2}{\sqrt{k}}$.

statt $z = \frac{2b^2a}{\sqrt{k}}$, $\frac{2a^2b^2c}{\sqrt{k}}$.

statt $\sin BAC = \frac{\sqrt{k}}{2bc}$, $\frac{\sqrt{k}}{2abc^2}$.

statt $\sin ABC = \frac{\sqrt{k}}{2ac}$, $\frac{\sqrt{k}}{2a^2bc}$.

statt $\sin ABC = \frac{\sqrt{k}}{2b^2}$, $\frac{\sqrt{k}}{2ab^2c}$.

statt $\triangle ABC = \frac{ab^2c}{\sqrt{k}}$, $\frac{a^2b^2c^2}{\sqrt{k}}$.

Es leitete mich bei Abfassung dieser Schrift die redliche Absicht, der Mathematik dadurch, meinen Kräften gemäß, zu nützen.

Ich bin zufrieden, wenn dieses anerkannt, und nicht, bei zu großer Berücksichtigung des noch zu Leistenden, das wirklich Geleistete ungerecht beurtheilt wird.

Im April 1817.

Der Verfasser.

Inhalt.

Vorauszuschickende Bemerkungen.

a) Ueber arithmetische Gegenstände. S. 1.
b) Ueber Gegenstände der Geometrie. — 5.

I. Abschnitt.

Arithmetische Theorie des Gegensatzes positiver Zahlen und Größen.

§. 1. Vom Multiplicationsgegensatze. — 6.
§. 2. Vom Additionsgegensatze an bloßen Zahlen, nach seiner Aehnlichkeit mit dem Multiplicationsgegensatze. — 7.
§. 3. Grundrechnungsarten an positiven und negativen Zahlen. — 12.
§. 4 Nothwendigkeit den Begriff des Additionsgegensatzes noch zu erweitern. — 17.
§. 5. Additionsgegensatz an Größen. — 18.
§. 6. Grundrechnungsarten an Größen, bei denen Additionsgegensatz Statt findet. — 31.
§. 7. Weitere Vergleichung des Additionsgegensatzes an Größen, mit dem Multiplicationsgegensatze an Zahlen. — 36.

**

§. 8. Von 0, $+\infty$, $-\infty$, als Symbolen von Größen. Wie negative Größen und Zahlen kleiner sind als 0. S. 37.
§. 9. Anwendung des Additionsgegensatzes in der Buchstabenrechnung. — 38.
§. 10. Anwendung des Additionsgegensatzes in der Algebra. — 41.
§. 11. Von den scheinbaren Unbegreiflichkeiten in der Theorie des Additiongegensatzes, die aus Vernachlässigung des Unterschiedes von Größen und Zahlen entspringen. — 53.
§. 12. Ueber $\frac{1}{0} = \pm\infty$, oder das Uebergehen einer Zahl oder Größe aus + in — durch 0 oder durch $\pm\infty$. — 54.

II. Abschnitt.

Grundsätze für die Anwendung des Additionsgegensatzes in der Geometrie.

§. 13. Mannichfaltigkeit und Eintheilung dieser Untersuchungen. — 59.
§. 14. Euthynomischer Additionsgegensatz gerader Linien. — 60.
§. 15. Gegensatz gerader Linien in der Epipedonomie.
§. 16. Gegensatz von Winkeln. — 70.
§. 17. Gegensatz nicht gerader Linien. — 75.
§. 18. Gegensatz der Abscissen und der Ordinaten bei der Bestimmung eines Constructs durch Coordinaten. — 76.
§. 19. Gegensatz der Flächenräume. — 79.

III. Abschnitt.

Gebrauch des Gegensatzes gerader Linien bei Anwendung der Algebra in der Geometrie.

§. 20. Gebrauch des Additionsgegensatzes bei den Formeln des Pythagorischen Lehrsatzes und einigen daraus abgeleiteten. — 81.

§. 21. Ueber die Anwendung des Additionsgegensatzes bei algebraischer Auflösung der geometrischen Aufgaben im Allgemeinen. S. 95.
§. 22. Beispiel I. — 96.
§. 23. Beispiel II. — 99.
§. 24. Beispiel III. — 102.
§. 25. Beispiel IV. — 105.
§. 26. Beispiel V. — 109.
§. 27. Beispiel VI. — 112.
§. 28. Beispiel VII. — 119.
§. 29. Beispiel VIII. — 130.
§. 30. Beispiel IX. — 135.
§. 31. Rückblick auf die in diesem Abschnitte gemachten Bemerkungen. — 142

IV. Abschnitt.

Von der Anwendung des Additionsgegensatzes in der Trigonometrie.

§. 32. Vorläufige Ansicht. — 145.
§. 33. Untersuchung, wann die trigonometrischen Functionen positiv wann sie negativ sind. — 146.
§. 34. Vergleichung dieser Darstellung mit der gewöhnlichen. — 154.
§. 35. Untersuchung über die Abhängigkeit der trigonometrischen Functionen von einander. — 155.

Erster Anhang.

Ueber Carnot's Ansicht vom Gegensatze positiver und negativer Größen in seiner Géométrie de Position. — 158.

Zweiter Anhang.

Auflösung der Aufgabe aus den Höhen eines Dreiecks seine Seiten zu berechnen. S. 165.

Vorauszuschickende Bemerkungen

über einige

Grundbegriffe der reinen Mathematik.

---

1. Die Worte Größe, quantitas, quantité u. s. w. werden bis jetzt immer in einem sehr weiten Sinne genommen. Man nennt selbst jede Zahl eine Größe; so heißen also auch Potenzen, Wurzeln, Logarithmen, und andere Functionen bloßer Zahlen, Größen. Dem Verfasser scheint dies eine der Klarheit und Richtigkeit mathematischer Begriffe sehr schädliche Gewohnheit. Zahlen sind durchaus keine Größen, wenn man den Begriff der Größe nicht ganz unzweckmäßig über seine ihm gebührende Gränze ausdehnen will. Linien, Winkel, Flächenräume, Körper, Gewichte, Zeiträume, Mengen von Personen, von Büchern u. s. w. sind Größen; Zahlen aber sind bloß Ausdrücke der Verhältnisse gleichartiger Größen. Eine Linie durch eine andere gemessen gibt eine Zahl. Die beiden Linien sind gleichartige Größen, die gefundene Zahl drückt nur das Verhältniß derselben aus.

Dieser hier gegebene Unterschied zwischen Größe und Zahl befördert ungemein die Richtigkeit und Deutlichkeit der Einsichten in die allgemeine Größenlehre, oder die Arithmetik im weitesten Sinne, und seine Vernachlässigung scheint dem Verfasser ein Hauptfehler der gewöhnlichen arithmetischen Lehrbücher. Gegen den Begriff der stetigen Größen, wenn man ihn nicht auf die Größen des Raums beschränkt, möchte sich nichts erinnern lassen; aber der gemeine Begriff der discreten Größen ist gänzlich unhaltbar. Dem Verfasser sind discrete Größen (oder Mengengrößen) solche, welche bloß Mengen von Gegenständen einerlei Art und einerlei Benennung, denen also ein und derselbe Begriff zukommt, ausdrücken, z. B. 5 Bücher, 6 Kinder u. s. w. Dagegen die bloßen Zahlen 5, 6 sind durchaus keine Größen. Die Arithmetik ist die Lehre von den Größen überhaupt und besonders von den Zahlen, den Ausdrücken des Verhältnisses gleichartiger Größen; sie läßt sich sowohl auf stetige Größen (Ausdehnungsgrößen) wie auf Mengengrößen anwenden. Der in so vielen deutschen mathematischen Lehrbüchern sich findende Satz, die Arithmetik habe bloß die discreten Größen zu Gegenständen, ist ganz sinnlos.

Man kann keine Größe, aber wohl jede Zahl mit sich selbst multipliciren. Es gibt daher keine

Potenzen von Größen, sondern bloß von Zahlen; daher sind auch Wurzeln aus Größen Undinge. Wo man in der Geometrie z. B. von Potenzen gerader Linien zu reden pflegt, sollte man nur von Potenzen der Zahlen reden, welche diese Linien in Bezug auf eine Einheit ausdrücken.

2. Die Gegenstände der Geometrie sind Constructionen im Raume. Statt Construction werde ich mich aber des Wortes Construct bedienen, da Construction eigentlich die Erzeugung eines Constructs (entweder durch die bloße Anschauungskraft des Geistes, oder durch Zirkel, Lineal u. s. w. in einer sinnlichen Zeichnung) bedeuten sollte. Gleiche Constructe stimmen vollkommen überein, ähnliche in der Form.

Man theilt die Geometrie gewöhnlich in zwei Haupttheile, Planimetrie (oder ebene Geometrie) und Stereometrie. Die Planimetrie ist dann, wenn man einen richtigen Begriff von ihr auffaßt, der wirklich geschickt ist, einen Haupttheil der Geometrie zu bestimmen, die Lehre von den Constructen in der unbegränzten Ebene; die Stereometrie ist die Lehre von den Constructen im unendlichen Raume. Bei dieser Eintheilung übersieht man aber die Lehre von den Constructen in der unbegränzten geraden Linie, welche Lehre den ersten Haupttheil der Geometrie ausmachen sollte. Dies mag wol

darin seinen Grund haben, daß das, was sich von diesen Constructen in der geraden Linie sagen läßt, nur gering ist, so daß man meint, alles dies auch in die Planimetrie aufnehmen zu können; auch dringt sich die Nothwendigkeit der Trennung der Lehre von den Constructen in der geraden Linie von den übrigen Theilen nicht so sehr auf, wie die Nothwendigkeit der Trennung der Stereometrie von der Planimetrie, welche schon dadurch fühlbar wird, daß man stereometrische Constructe nicht so vollkommen in einer Ebene durch Zeichnung darstellen kann, wie planimetrische Constructe, während im Gegentheil Constructe in einer geraden Linie sich auch recht gut in einer Ebene darstellen lassen. Dem Verfasser scheint es aber in einer strengen Wissenschaft durchaus nothwendig, die Betrachtung jener Constructe in einer geraden Linie einem besondern Haupttheile zu überlassen; auch läßt sich gar Manches über dieselben sagen, was in den gewöhnlichen Lehrbüchern nicht gesagt wird.

Man findet hier und da als Theile der Geometrie angegeben: Longimetrie, Planimetrie, Stereometrie. Unter diesen Worten versteht man aber Linien-, Flächen-, Körper-Messung, und rechnet auch die Betrachtung krummer Linien zur Longimetrie u. s. w., ganz der genauen Eintheilung zuwider.

Der Verfasser hat es für zweckmäßig gehalten, für die oben angegebenen Hauptttheile neue Worte zu gebrauchen. Er nennt Euthynomie die Lehre von den Constructen in der unbegränzten geraden Linie, Epipedonomie die Lehre von den Constructen in der unbegränzten Ebene; Stereonomie die Lehre von den Constructen im unendlichen Raume. Man könnte dafür auch sagen: Geometrie einer, zweier, dreier Dimensionen.

Erster Abschnitt.

Arithmetische Theorie des Gegensatzes positiver und negativer Zahlen und Größen.

---

§. 1.

Es gibt in der Arithmetik außer dem Gegensatze zwischen positiven und negativen Zahlen noch einen andern, dessen Theorie keinen Schwierigkeiten unterworfen ist, und sehr viel zur Aufhellung der Theorie des Gegensatzes positiver und negativer Zahlen beitragen kann. Dies ist der Gegensatz zwischen einer Zahl und dem Quotienten aus der Division von 1 durch diese Zahl, also allgemein zwischen m und $\frac{1}{m}$. Dieser Gegensatz ist für die Multiplication und Division eben das, was der Gegensatz positiver und negativer Zahlen oder Größen für die Addition und Subtraction ist. Daher mag er Multiplicationsgegensatz genannt werden, so wie der zwischen positiven und negativen Zahlen Additionsgegensatz.

Die Multiplication durch eine Zahl m wirkt eben so viel, wie die Division durch die multipli-

cativ entgegengesetzte $\frac{1}{m}$. Dies kann man als Definition des Multiplicationsgegensatzes betrachten.

Nur Zahlen können einander multiplicativ entgegengesetzt seyn, nicht Größen.

Zu zwei multiplicativ entgegengesetzten Zahlen gelangt man auch bei der Vergleichung von zwei gleichartigen Größen, wenn man erst die eine, dann die andre zur Einheit bei dieser Vergleichung wählt. Z. B. Man habe zwei Linien A und B; nimmt man A zur Einheit, um B damit zu messen, so erhalte man $B:A=\frac{3}{5}$; dann wird umgekehrt, B zur Einheit genommen, $A:B=\frac{5}{3}$ seyn.

1 ist die Mittel- oder die Scheidezahl der multiplicativ entgegengesetzten Zahlen. 1 ist sich selbst multiplicativ entgegengesetzt. Multiplication so wie auch Division durch 1 ändern nichts. Das Product von zwei multiplicativ entgegengesetzten Zahlen ist $=1$; z. B. $4\cdot\frac{1}{4}=1$; $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=1$. Eine Zahl, durch sich selbst dividirt, oder einer Größe, durch sich selbst gemessen, gibt 1. Zahlen, welche größer sind als 1, sind ächten Brüchen entgegengesetzt. Die Gränze der Zahlen, die größer sind, als 1, ist ∞, die der Zahlen, welche kleiner sind als 1, ist 0; 0 und ∞ sind sich multiplicativ entgegengesetzt.

§. 2.

I. Der Additionsgegensatz der Zahlen ist für die Addition und Subtraction eben das, was

für die Multiplication und Division der Multiplicationsgegensatz ist.

Additiv entgegengesetzt sind also zwei Zahlen, wenn die Subtraction der einen dasselbe bewirkt, wie die Addition der andern.

Bei Rechnungen, wo der Additionsgegensatz nicht ins Spiel kommt, zu denen gar keine Kenntniß desselben erforderlich ist, für die also die gewöhnlichen Rechnungsregeln ohne Zusatz giltig sind, heißen alle Zahlen absolut. Bei Rechnungen, wo der Additionsgegensatz berücksichtigt werden muß, treten an die Stelle der absoluten Zahlen die positiven; für diese gelten die bekannten Rechnungsregeln. Die den positiven Zahlen additiv entgegengesetzten Zahlen heißen negativ. Die positiven Zahlen pflegt man durch + zu bezeichnen, doch ist dies Zeichen meistens überflüssig; dagegen ist ein Zeichen für die negativen Zahlen unentbehrlich, und man hat dazu das Minuszeichen, —, gewählt; da dies Zeichen aber zugleich Subtraction bedeutet, und der Begriff subtractiver Zahlen (absolute Zahlen, die subtrahirt werden sollen) vom Begriffe negativer Zahlen streng zu sondern ist: so mag, wenigstens fürs Erste, zur Beförderung der Deutlichkeit, dies Zeichen der Negation über die Zahlen, nicht vor dieselben gesetzt werden.

II. Nach der Definition ergibt sich sogleich in Zeichen $a+b=a-\bar{b}$ und $a-b=a+\bar{b}$.

Z. B. $10+3=10-\bar{3}=13$.

$10-3=10+\bar{3}=7$.

III. Ein Buchstabe kann sowohl eine positive, als eine negative Zahl bedeuten. Ueber einen Buchstaben bedeutet —, daß man die additiv entgegengesetzte Zahl von der nehmen soll, die unter jenem Buchstaben erstanden wird. Ist $a=4$, so ist $\bar{a}=\bar{4}$; ist aber $a=\bar{4}$, so ist $\bar{a}=4$.

IV. $\bar{\bar{a}}$ bedeutet die entgegengesetzte Zahl von $\bar{a}$, und also ist $\bar{\bar{a}}=a$.

$\bar{\bar{\bar{a}}}$ bedeutet die entgegengesetzte Zahl von $\bar{\bar{a}}$ oder von a, also ist $\bar{\bar{\bar{a}}}=\bar{a}$.

So heben sich zwei, oder so hebt sich überhaupt eine gerade Anzahl von Negationszeichen immer unter sich auf; eine ungerade Anzahl dagegen läßt sich auf ein einziges zurückführen.

V. Zwischen zwei additiv entgegengesetzten Zahlen liegt o genau in der Mitte.

o ist die Mittel- oder Scheidezahl der positiven und negativen Zahlen. o ist sich selbst additiv entgegengesetzt, $\overset{+}{o}=\overset{-}{o}$, d. h. man kann o sowohl als positiv, als

auch als negativ ansehen; beides giebt einerlei. Man hat $a + o = a - o = a$, d. h. die Addition oder die Subtraction von o åndern nichts. Ferner ist $a + \bar{a} = o$, d. h. die Addition von zwei additiv entgegengesetzten Zahlen gibt o; endlich ist $a - a = o$, d. h. eine Zahl von sich selbst subtrahirt, gibt o.

So ist o eben das fůr den Additionsgegensatz, was 1 fůr den Multiplicationsgegensatz ist.

VI. Von einer positiven und einer negativen Zahl, die aber nicht eigentlich direct additiv entgegengesetzt sind, sagt man: sie haben verschiedene Zeichen; so z. B. 3 und $\bar{4}$.

VII. Die Grånze der positiven Zahlen, der sie sich beim Wachsen nåhern, wird durch das Symbol $+\infty$ dargestellt; die Grånze der negativen Zahlen ist $-\infty$.

VIII. Man schreibt die Reihe der positiven und der negativen Zahlen gern so:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ +3 \\ +2 \\ +1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{array}$$

Hier stehen die **positiven** Zahlen **über**, die **negativen unter** o. Diese Art sich auszudrücken möchte Vorzüge haben vor dem Ausdrucke: die negativen Zahlen sind kleiner als o, den man nur in einem sehr eingeschränkten Sinne gelten lassen kann.

Man sagt $2 > \bar{3}$; $\bar{3} > \bar{7}$, u. s. w. Statt zu sagen: 2 ist größer als $\bar{3}$ könnte man vielleicht besser sagen: 2 steht über $\bar{3}$ oder höher als $\bar{3}$.

Zuweilen ist es nothwendig, bei der Beurtheilung, welche Zahl die größere sey, nicht auf den Additionsgegensatz zu sehen. Dann ist $\bar{5}$ größer als 3. Um dieses zu bezeichnen, könnte man sich eines besondern Zeichens bedienen. Ich schlage dazu vor die Zeichen |ı und ı|, wobei der größere Strich der größern Zahl (auch der größern Größe) zugekehrt ist. So wäre $\bar{5}$ |ı 3 und $\bar{2}$ ı| $\bar{3}$. Mit Anwendung dieses Zeichens kann man nun auch z. B. sagen: Ist m |ı n, so ist auch m^2 |ı n^2, m^3 |ı n^3 u. s. w.

IX. Mit Anwendung des Additionsgegensatzes kann man sich nun bei der Angabe eines Aggregats des Subtractionszeichens ganz enthalten, und alles auf Addition zurückführen. So kann man statt $a + b - c$ schreiben $a + b + \bar{c}$.

§. 3.

Regeln für die Ausführung der Grundrechnungsarten mit positiven und negativen Zahlen.

1. Addition und Subtraction.

Die Regeln hiefür ergeben sich ohne Umstände aus dem Begriffe der positiven und der negativen Zahlen; denn die oben angegebene Definition additiv entgegengesetzter Zahlen gründet sich ja gerade auf ihr Verhalten bei der Addition und der Subtraction.

Addition.

Man kann vier Fälle unterscheiden; für jeden mag ein Beispiel aufgestellt werden.

1) $3+4=7$; zwei positive Zahlen geben eine positive Summe.

2) $7+\bar{4}=7-4=3$; die Summe einer positiven Zahl und einer negativen Zahl ist eine positive Zahl, wenn die positive, abgesehen vom Zeichen, die größere ist.

3) $4+\bar{7}=4-7=\bar{3}$. Die Summe einer positiven und einer negativen Zahl, ist eine negative Zahl, wenn die negative Zahl, abgesehen vom Zeichen, die größere ist.

Dieser Fall bedarf übrigens noch eines Beweises und einer Erläuterung. Es fragt sich auch: welchen Sinn kann die gefundene negative Zahl haben, da sie durchaus nicht in Rechnungen eingeflochten ist, sondern als ganz für sich gegeben zu seyn scheint?

Da die Definition der negativen Zahlen bis jetzt bloß in Angabe von Eigenschaften derselben besteht, die man bei der Addition und Subtraction bemerkt, so kann man auch das Eigenthümliche und die Bedeutung der herausgekommenen negativen Zahl nur dann einsehen, wenn man dieselbe in Additionen oder Subtractionen verflochten denkt; ja man kann auch die Richtigkeit des Resultates nur zeigen, indem man darthut, daß die Verflechtung von $4 + \overline{7}$ in eine Rechnung durch Addition oder Subtraction eben das hervorbringt, wie eine gleichartige Rechnung mit der Zahl $\overline{3}$.

Man habe z. B. die Summe $4 + \overline{7}$ zu einer beliebigen positiven Zahl, etwa 10, zu addiren: so ist

$$10 + (4 + \overline{7}) = 10 + 4 + \overline{7} = 14 + \overline{7} = 14 - 7 = 7.$$

Und wenn man statt $4 + \overline{7}$ seinen oben gefundenen Werth $\overline{3}$ setzt, so kommt ebenfalls

$$10 + (4 + \overline{7}) = 10 + \overline{3} = 10 - 3 = 7.$$

also ist obige Rechnungsweise richtig.

4) $\bar{5}+\bar{3}=\bar{8}$. Die Summe zweier negativen Zahlen ist eine negative Zahl.

Auch hiervon ergibt sich die Richtigkeit auf eine ähnliche Weise.

Es ist $12+(\bar{5}+\bar{3})=12+\bar{5}+\bar{3}=12-5-3$ $=12-8=4$ und auch $12+\bar{8}$ ist $=12-8=4$.

Subtraction.

Diese läßt sich sehr leicht auf die Addition zurückführen, indem man das Zeichen der abzuziehenden Zahl verändert, und dann addirt.

Exempel:

1) $8-\bar{3}=8+3=11$.
2) $\bar{4}-5=\bar{4}+\bar{5}=\bar{9}$.
3) $2-7=2+\bar{7}=\bar{5}$.
4) $\bar{3}-\bar{8}=\bar{3}+8=5$.
5) $\bar{7}-\bar{1}=\bar{7}+1=6$.

Man kann den Zweck einer solchen Subtraction auch so ausdrücken: Man soll untersuchen, um wie viel Glieder in der unendlichen Reihe der positiven und negativen Zahlen

⋮
+ 3
+ 2
+ 1
0
— 1
— 2
— 3
⋮

der Minuendus höher oder tiefer stehe, als der Subtrahendus; ein positiver Rest zeigt an, er stehe höher, ein negativer, er stehe tiefer.

2. Multiplication und Division.

Zur Ableitung der Regeln hiefür ist es nothwendig, schon die Gesetze für die Multiplication und Division mit Aggregaten zu kennen, und zu wissen, daß dabei gleiche Zeichen +, ungleiche — geben. (Diese Regel läßt sich recht gut ableiten, wenn man auch + und — bloß als Additions- und Subtractionszeichen ansieht.)

Multiplication.

1) Man weiß, daß $(a-b).c=ac-bc$, wenn a, b, c absolute oder positive Zahlen bedeuten.

Nun aber ist $(a-b)=a+\overline{b}$, also muß $(a+\overline{b}).c=(a-b).c=ac-bc$ seyn.

Nun verlangt aber die gesuchte Anwendbarkeit der negativen Zahlen in solchen Aggregaten, daß auf eine solche Multiplication, wie $(a+\bar{b}).c$ auch die Regeln für die Multiplication von Aggregaten, wie sie für absolute Zahlen gegeben werden, müssen angewendet werden können. So erhält man $(a+\bar{b}).c = ac+\bar{b}.c$.

Dies Resultat soll dem obigen gleich seyn, also $ac+\bar{b}.c = ac-bc$

Daraus folgt, daß $\bar{b}.c$ addiren, eben so viel ist, wie bc subtrahiren, oder daß $\bar{b}.c = \overline{b.c}$; nun ist bc eine absolute oder positive Zahl, also $\bar{b}.c$ eine negative. So ergibt sich die Regel: + mit — gibt —.

2) Man weiß, daß

$$(a-b).(c-d) = ac-bc-ad+bd.$$

Aber statt $(a-b).(c-d)$ kann man setzen $(a+\bar{b}).(c+\bar{d})$ und dieß muß seyn $= ac+\bar{b}.c+a.\bar{d}+\bar{b}.\bar{d}$.

Also ist

$$ac-bc-ad+bd = ac+\bar{b}.c+a\bar{d}+\bar{b}.\bar{d}.$$

Nun ist $ac = ac$

und nach 1) $-bc = +\bar{b}.c$

so wie $-ad = +a.\bar{d}$

d. h. die drei ersten Glieder von beiden Ausdrükken stimmen überein; zur Gleichheit beider Ausdrücke ist also erforderlich, daß auch die beiden letzten Glieder gleich sind. So ergibt sich

$$\bar{b}.\bar{d}=bd$$

d. h. das Product aus zwei negativen Zahlen ist eine positive Zahl.

Also läßt sich auch hier die Regel aussprechen: Gleiche Zeichen geben +, ungleiche geben —.

Division.

Durch Umkehrung der verschiedenen Sätze für die Multiplication bestätigt sich auch hier die Regel: Gleiche Zeichen geben +, ungleiche —.

§. 4.

Die, durch das Vorige erlangte Kenntniß von den negativen Zahlen ist aber immer noch sehr unvollkommen. Von einer isolirten, d. h. für sich, ganz außerhalb einer Rechnung gegebenen Zahl kann man, nach dem Vorigen, sich nur einen Begriff machen, wenn man sich doch vorstellt, daß diese Zahl in eine Rechnung eingeflochten werden könnte, wobei der Umstand, daß sie negativ sey, mit berücksichtigt werden müßte, um zum richtigen Resultate zu gelangen.

Nun aber ist der höchste oder äußerste Zweck mathematischer Rechnungen die Bestimmung der

Verhältnisse von Größen. Bloße Zahlen haben nur einen Werth, indem sie entweder gebraucht werden, um durch sie selbst die Verhältnisse von Größen darzustellen, oder, indem sie in Rechnungen eingeflochten werden müssen, wodurch zuletzt die Zahlen, welche jene Verhältnisse ausdrücken, gefunden werden. Die Anwendbarkeit negativer Zahlen in Rechnungen kennen wir schon. Aber jetzt fragt sich, ob negative Zahlen nicht auch als Ausdrücke des Verhältnisses von zwei gleichartigen Größen erscheinen, — ja, es fragt sich, ob nicht auch an Größen selbst ein gewisser Gegensatz Statt finden könne, der das für Größen sey, was der bisher betrachtete Gegensatz positiver und negativer Zahlen für die Zahlen war. Die Untersuchungen, welche diese Frage betreffen, sind noch wichtiger, als die vorigen.

§. 5.

Additionsgegensatz an Größen.

I. Größen, die in Hinsicht ihrer quantitativen Natur völlig gleichartig sind, die man addiren oder subtrahiren kann, und wovon sich die eine durch die andre messen läßt, können doch in verschiedenartiger äußerer Erscheinung gegeben, können in Bezug auf ein qualitatives Verhältniß, das ganz außer ihrer innern quantitativen Natur

liegt, sehr verschieden seyn. So kann z. B. eine Summe Geldes erscheinen als Preis einer Waare, als Vermögen einer Person, als eine Geldsumme, die Jemand in Händen hat, als Ausgabe einer Person, als Einnahme, als eine Schuld u. s. w. Man kann diese qualitative Erscheinung einer Größe durch ein Wort andeuten, das man der Benennung der Einheit anhängt; und dies Wort kann die qualitative Benennung der Größe genannt werden. So ist in dem Ausdrucke „5 Rthlr. Ausgabe" das Wort Ausgabe die qualitative Benennung dieser Größe 5 Rthlr.

So lange die Arithmetik theoretisch bleibt, kann man sagen 3 Rth. + 2 Rth. = 5 Rth.; man kann mit Größen rechnen, ohne denselben eine qualitative Benennung zu geben. Dagegen sind solche qualitative Benennungen sehr zu berücksichtigen, sobald man die theoretische Arithmetik practisch anwendet.

Für das Resultat, das man in einer practischen Rechnung sucht, ist immer schon eine qualitative Benennung gegeben. Eine gesuchte Geldsumme kann z. B. den Inbegriff des ganzen Vermögens einer Person, den Preis einer Waare, die Veränderung des baaren Geldes, das eine Person in Händen hat, oder dergleichen ausdrücken sollen. Nun fragt sich: was für qualitative Benennungen können bei solchen Berechnungen an den gegebe-

nen Größen Statt finden, woran gerechnet werden soll? Es sind hiebei jedoch bloß Addition und Subtraction zu berücksichtigen.

Gleichartige Größen, die ungleiche qualitative Benennungen haben, sollen qualitativ-ungleichartig, solche, die gleiche qualitative Benennungen haben, sollen quantitativ- und qualitativ-gleichartig heißen.

Zuvörderst ist nun die Möglichkeit klar, daß die Größen, an denen man addirt oder subtrahirt, alle mit derselben qualitativen Benennung behaftet seyen, welche die gesuchte Größe bei sich führen soll. Z. B. statt der Addition 3 Rthl. + 2 Rthl, = 5 Rthl. kann man bei praktischen Rechnungen haben

3 Rthl. Einnahme einer Person A + 2 Rthlr. Einnahme von A = 5 Rthl. Einnahme von A.

Hier war für den gesuchten Geldwerth die qualitative Benennung „Einnahme einer Person A" gegeben, und dies Resultat konnte durch Addition von Geldwerthen mit eben der qualitativen Benennung gefunden werden.

Nun fragt sich, ob nicht zuweilen auch durch Addition oder Subtraction an Größen, die gleichartig sind, aber veeschiedene qualitative Benennungen haben, ein bestimmtes Resultat gefunden werden könne. Es seyen z. B. gegeben 3 Rthl. als Einnahme einer Person A, 2 Rthl. aber als eine

Summe, welche eine andre Person einer dritten schuldig ist; so fragt sich: was wird die Summe dieser beiden Größen seyn? Sie sind beide quantitativ-gleichartig; beide sind Geldsummen, aber sieht man auf ihre qualitativen Benennungen, so sind sie qualitativ-ungleichartig, und wollte man auch sagen, die Summe sey = 5 Rthl., so würde man nicht wissen, welche qualitative Benennung man diesen 5 Rthl. beilegen sollte; die Addition jener beiden Größen würde in der practischen Arithmetik ohne Zweck seyn. So zeigt sich an diesem Beispiele, daß in der practischen Arithmetik die qualitative Ungleichartigkeit von zwei Größen ein Hinderniß ihrer Addition und Subtraction ist, so lange man keine qualitative Benennung finden kann, die dem Resultate jener Rechnungen beigelegt werden müßte.

Wollte man aber hieraus schließen, daß qualitative ungleichartige Größen sich nie addiren oder subtrahiren ließen: so würde das viel zu voreilig seyn. Es gibt nämlich bei mancherlei quantitativ-gleichartigen Größen, zum Theil in zahlreicher Menge, Paare von verschiedenen qualitativen Benennungen, deren Verschiedenheit die Addition und die übrigen Rechnungsarten durchaus nicht unmöglich macht. Wenn solche zwei qualitativ-ungleichartige Größen addirt werden, so läßt sich für das Resultat eine bestimmte qualitative Benennung fin-

den, die entweder die eine oder die andre jener qualitativen Benennungen seyn wird (zuweilen noch mit einem kleinen, sie näher bestimmenden Zusatze). Und zwar wirkt bei Rechnungen, worin solche qualitativ=ungleichartige Größen vorkommen, die Addition einer Größe eben so viel, wie die Subtraction einer gleich großen, aber mit der andern Benennung behafteten Größe. Wegen dieser Eigenschaft können solche Größen für eben das unter den Größen gehalten werden, was unter den Zahlen additiv entgegengesetzte sind. Daher werden auch solche Größen additiv entgegengesetzt genannt werden können; ja selbst die beiden mit solchen Größen verbundenen qualitativen Benennungen können entgegengesetzte Benennungen heißen. Beispiele werden Alles verdeutlichen.

Erstes Beispiel.

Eine Person A besitze in ihren Händen an Gelde und Geldeswerthe 1000 Rthlr., so kann die qualitative Benennung dieser 1000 Rthl. seyn: Geldeswerth im Besitz; eben diese Person sey 200 Rthl. andern Leuten schuldig, so mag die Benennung dieser 200 Rthl. seyn: Schulden; durch das Zusammentreffen beider Größen, was in der Rechnung durch Addition ausgedruckt werden muß, entsteht ein Geldeswerth von 800 Rthl., welcher als Geldeswerth im Besitz angesehen werden kann,

und der dazu dient, das Vermögen von A auszudrücken, im Fall die 1000 Rthl. alles sind, was A in Händen hat, und 200 Rthl. Alles, was A schuldig ist, kurz wenn bei der Berechnung des Vermögens von A weiter nichts in Betracht kommt. Der Zusatz bei der qualitativen Benennung des Resultates, Geldeswerth im Besitz, nämlich daß dieß Resultat das ganze Vermögen von A ausdrückt, fällt weg, sobald die 1000 Rthl. und 200 Rthl. nicht Alles sind, was A besitzt, und was A schuldig ist. Dann hat man bloß: 1000 Rthl. im Besitz + 200 Rthl. Schulden = 800 Rthl. im Besitz; denn ob A 1000 Rthl. besitzt (unter andern Summen, die er in Händen hat) und 200 Rthl. schuldig ist (unter andern Schulden) oder ob er dafür 800 Rthlr. besitzt, ist einerlei.

Zweites Beispiel.

Dieß mögen begränzte gerade Linien geben, welche Stücke einer unbegränzten geraden Linie ausmachen. Eine gerade Linie wird entstehend gedacht, indem sich ein Punct von der Stelle des einen Gränzpunctes bis in die Stelle des andern Gränzpunctes bewegt. Bewegt sich ein Punct von der Stelle A aus erst nach B, so daß die Linie AB entsteht, dann, in derselben Richtung von B nach C, wodurch die Linie BC entsteht: so ist durch das Zusammentreffen dieser beiden Bewegungen der

Punct von der Stelle A in die Stelle C versetzt. Dieß Zusammentreffen der Bewegungen wird in der Rechnung durch Addition ausgedrückt. Es liege nun B von A aus rechts, so wie auch C von B, es sey AB = 5 Fuß, BC = 3 Fuß; dann kann man bestimmter sagen:

AB = 5 F., durch Bewegung rechts hin entstanden,

BC = 3 F., durch Bewegung rechts hin entstanden.

Durch die Addition beider Linien entsteht die Linie:

AC = 8 F., durch Bewegung rechts hin entstanden; und diese Linie drückt die Entfernung des Puncts C von A aus.

Läge dagegen der Punct C links von B, so müßte man sagen:

AB = 5 F., durch Bewegung rechts hin entstanden.

BC = 3 F., durch Bewegung links hin entstanden.

Durch die Addition von beiden Linien ergibt sich:

AC = 2 F., durch Bewegung rechts hin entstanden, eine Linie, welche die Entfernung des rechts von A liegenden Punctes C von A ausdrückt.

Auf gleiche Weise kann man durch die Addition von weit mehr als 2 Linien, die theils durch Bewegung rechts, theils links entstanden gedacht werden, eine Linie finden, welche die am Ende der

Bewegung Statt findende Entfernung des sich bewegenden Punctes vom Anfangspuncte A ausdrückt.

So könnte der Zusatz „eine Linie, welche die letzte Entfernung des Punctes von A ausdrückt," der qualitativen Benennung der Summe eine nähere Bestimmung geben, eben so, wie im Beisp. 1. der Zusatz „Geldeswerth, der das Vermögen von A ausdrückt." — Nun fragt sich aber, ob und wie bei dem gegenwärtigen Beispiele es seyn kann, daß man nicht im Stande ist, dem Resultate eine solche nähere, wirklich etwas bezweckende Bestimmung zu geben, und es findet sich, daß dieß wirklich gewissermaßen dann der Fall ist, wenn man gar nicht, als eigentlichen Zweck der Rechnung, die letzte Entfernung des sich bewegenden Punctes von A, sondern von einem ganz andern Puncte in derselben Richtung, etwa M, wissen will. Dann kann man bloß sagen: Die durch jene Addition gefundene Linie AC = 2 F., die von A aus rechts liegt, kann man in der Berechnung der Entfernung von M, in welche zuletzt der Punct gekommen ist, an die Stelle der Bewegungen setzen, welche erfolgten, nachdem der Punct schon in die Stelle A gekommen war, und die ihn von da nach C versetzten. — Doch sind diese letzten Erörterungen nur gemacht worden, um die genaue Aehnlichkeit der Beispiele 1 und 2 zu zeigen; an sich sind

sie nicht sehr wichtig. — Nur auf folgendes Resultat dieser Untersuchungen kommt es an:

Es lassen sich oft zwei verschiedene qualitative Benennungen an zwei quantitativ gleichartigen Größen denken, welche die Verbindung derselben in Rechnungen nicht hindern, die aber die Eigenschaft haben, daß die Addition von zwei Größen, wovon die eine mit der einen, die andere mit der andern Benennung behaftet ist, eine Summe gibt, welche die Benennung der größern von beiden hat, und deren Quantität man findet, wenn man von der größern Größe die kleinere abzieht, ohne auf die Benennungen zu sehen; oder welche die Eigenschaft haben, daß die Addition einer mit der einen Benennung versehenen Größe, gerade das Gegentheil von der Addition der andern Größe thut, wenn diese Größen sonst gleich waren. Solche Größen stehen im Additionsgegensatze, ihre Benennungen sind entgegengesetzt.

II. Eine Größe kann auf zweierlei Art gegeben seyn, entweder 1) geradezu oder unmittelbar, wie z. B. die Seiten u. s. w. in einer gezeichneten Figur gegeben sind, ohne gemessen zu seyn; oder 2) mittelbar, d. h. durch eine Zahl in Bezug auf eine als gegeben betrachtete Einheit ausgedrückt.

Sind zwei additiv entgegengesetzte Größen geradezu gegeben, so kann man die eine positiv, die andre negativ nennen. Hier ist es aber völlig willkührlich, welche man positiv, welche negativ nennen will, obgleich man in einer besondern Untersuchung einen Grund haben kann, das Eine oder das Andre vorzuziehen. Ganz anders ist es bei den positiven und negativen Zahlen; bei diesen findet diese Gleichgiltigkeit durchaus nicht Statt, wie man schon daraus schließen kann, daß positive ein für allemal solche seyn sollen, für welche die bekannten Rechnungsregeln eben so wie für absolute Zahlen gelten, während die negativen Zahlen ganz andern Rechnungsregeln unterworfen sind; denn so würde jene Gleichgiltigkeit, welche Zahl man positiv oder negativ nennen wollte, sich gar nicht z. B. mit dem Satze vereinen lassen, daß positive Zahlen zu Quadraten positive Zahlen, negative aber nicht negative, d. h. nicht solche von ihrer eignen Art, sondern ebenfalls positive Zahlen geben. Auch wird sich hierüber bald noch mehr sagen lassen.

Nun ist es aber, wenn eine eigentliche Rechnung mit einer Größe möglich seyn soll, ganz nothwendig, dieselbe mittelbar durch einen Zahlausdruck geben zu können, der in der Rechnung an ihre Stelle treten darf. Daher dringt sich die Frage auf: Da der Gegensatz positiver und ne-

gativer Größen großen Einfluß auf die Rechnung hat, wie wird man solche Größen durch Zahlen am bequemsten ausdrücken können, so, daß dabei auch der Gegensatz dieser Größen ausgedrückt werde.

Nun kamen zwar schon in I. Rechnungen mit additiv entgegengesetzten Größen vor, die durch Zahlen ausgedrückt waren; aber der Gegensatz derselben war daselbst bloß an den qualitativen Benennungen der Einheit ausgedrückt. Gegen diese Methode läßt sich aber viel erinnern. Sollen gleichartige Größen durch Zahlen ausgedrückt werden, so nimmt man eine und dieselbe Einheit, um diese Größen damit zu messen; in obigen Ausdrücken muß man aber die Einheiten, womit die additiv entgegengesetzten Größen gemessen werden sollen, wenn auch quantitativ übereinstimmend, doch qualitativ verschieden denken. Ferner ist man bei den Rechnungen gewohnt, fast bloß die Zahlen, woran gerechnet wird, zu berücksichtigen; daß 5 F. + 3 F. = 8 F. folgt daraus, daß 5 + 3 = 8; dieses läßt sich aber bei der Rechnung mit entgegengesetzten Größen nicht anwenden, so lange man jene Bezeichnungsart des Gegensatzes beibehält. Hieraus ergibt sich die Unvollkommenheit des obigen Verfahrens, und wie sehr man Grund hat, eine Methode aufzusuchen, wodurch der Gegensatz von Größen, statt an den der Einheit anhängenden Benennungen, an den Zahlen selbst ausgedrückt werde, welche

diese Größen in Bezug auf eine Einheit ausdrükken, damit man bei Rechnungen mit solchen Größen schon durch bloße Berücksichtigung der Zahlen zu den richtigen Resultaten gelange.

Es ist nicht schwer, diese Aufgabe zu lösen. Will man Größen, bei denen Additionsgegensatz Statt findet, in Bezug auf eine Einheit durch Zahlen ausdrücken, und dabei den Additionsgegensatz berücksichtigen, so ist es nothwendig, mit der Vorstellung der bloßen Quantität der Einheit auch noch eine von den beiden qualitativen Benennungen zu verbinden, welche man bei jenen Größen hat. Mißt man dann durch diese Einheit eine Größe, welche ebendieselbe qualitative Benennung bei sich hat, so ist die gefundene Zahl als *positiv* zu betrachten. Mißt man dagegen durch diese Einheit eine Größe, welche die entgegengesetzte Benennung hat: so muß man die gefundene Zahl als *negativ* betrachten. Z. B. Wenn man eine Linie von 6 Fuß Länge, welche in einer unbegränzten Linie links hin liegt, durch einen Fuß als Einheit messen will, der aber in der Linie durch Bewegung nach der rechten Seite entstanden gedacht wird: so muß jene Linie durch die Zahl $\bar{6}$ ausgedrückt werden. So kann man also sagen:

6 Fuß links = $\bar{6}$ Fuß rechts.

Und wenn solche entgegengesetzte Linien in einer

Rechnung vorkommen, so wird man, um alle dieselben auf die Einheit eines Fußes zu bringen, der durch Bewegung nach der rechten Seite entsteht, statt 6 F. links setzen müssen $\overline{6}$ F. rechts. Es wird sich leicht zeigen lassen, wie, bei dieser Methode, Rechnungen an solchen additiv entgegengesetzten Größen sich ausführen lassen, indem man an den bloßen Zahlen, welche die Größen ausdrücken, ganz nach den oben, §. 3, angegebenen Regeln rechnet.

Nun läßt sich auch ganz allgemein der Satz aussprechen: Eine Zahl, welche das Verhältniß von zwei gleichartigen aber additiv entgegen gesetzten Größen ausdrückt, ist negativ.

So entzieht man in der mittelbaren Angabe von Größen den Ausdruck des Additionsgegensatzes den qualitativen Benennungen, und wirft ihn dafür auf die Zahlen, welche das Verhältniß der zu messenden Größen zur Einheit ausdrücken.

So haben wir jetzt eine ganz neue Vorstellung von der Bedeutung negativer Zahlen gewonnen, welche weit wichtiger ist, als die frühere, §. 2 angegebene. Aber auch hier zeigt es sich, daß es durchaus nicht willkührlich ist, ob man eine Zahl positiv oder negativ nennen will. Sobald zwei gleichartige Größen gegeben sind, so kann die Zahl, die ihr Verhältniß ausdrückt, nur entweder positiv oder negativ seyn.

§. 6.

Ausführung der Grundrechnungsarten an Größen, bei denen Additionsgegensatz Statt findet.

Bei Rechnungen mit additiv entgegengesetzten Größen wird immer vorausgesetzt, daß dieselben nach §. 5. II. ausgedrückt sind, indem ihr Gegensatz nicht an den qualitativen Benennungen, sondern durch den Additionsgegensatz der Zahlen, welche diese Größen ausdrücken, bezeichnet ist.

I. Für die Addition und Subtraction findet es sich, daß man an den Zahlen, welche die gegebenen Größen ausdrücken, ganz nach den Regeln von §. 4 rechnen muß, um die Zahlen zu finden, welche die Resultate ausdrücken. Z. B. 7 Fuß rechts $+ \bar{9}$ Fuß rechts $= \bar{2}$ Fuß rechts. Dieß Resultat zu finden, braucht man bloß zu wissen, daß $7 + \bar{9} = \bar{2}$. Hiedurch zeigt sich schon in Bezug auf Addition und Subtraction die Zweckmäßigkeit, bei der Angabe von Größen den Gegensatz derselben durch den Gegensatz der Zahlen zu bezeichnen.

II. Aeußerst deutlich lassen sich nun auch die Regeln für die Multiplication und Division mit additiv entgegengesetzten Größen ableiten. Es mag dabei die Division einer Größe durch eine gleichartige zum Grunde gelegt werden; denn bei derselben läßt sich aus den Zeichen der beiden gege-

benen Größen sehr leicht das Zeichen finden, das man der Zahl geben muß, die als Quotient erscheint, indem eine solche Division ein mittelbares Messen einer Größe durch eine gleichartige ist, und wir also auf dieselbe die Regel anwenden können, daß eine Größe, gemessen durch eine gleichartige mit vollkommen gleicher Benennung, eine positive Zahl, eine Größe aber, gemessen durch eine gleichartige aber additiv entgegengesetzte, eine negative Zahl geben muß. Aus einem solchen Divisionsexempel werden sich aber immer zwei andere Rechnungen ableiten lassen, nämlich 1) eine Multiplication, indem man den Quotienten zum Multiplicator, den Divisor zum Multiplicandus, den Dividendus zum Producte macht; 2) eine Division einer Größe durch eine Zahl, indem man den Quotienten zum Divisor, den Divisor zum Quotienten macht. Auf diese Art werden sich durch Betrachtung verschiedener Beispiele von einer Division einer Größe durch eine gleichartige auch die Regeln für die Multiplication an Größen, so wie für die Division einer Größe durch eine Zahl ableiten lassen. Es wird aber 4 verschiedene Fälle in dem zu Grunde zu legenden Beispiele geben, indem entweder 1) beide Größen durch positive Zahlen, 2) beide Größen durch negative Zahlen ausgedrückt werden, oder 3) der Dividendus durch eine positive, der Divisor durch eine negative, oder

endlich 4) der Dividendus durch eine negative, der Divisor durch eine positive. Als ein bestimmtes Beispiel diene die Division 10 F. durch 2 Fuß. Es findet sich:

1) 10 F. r. : 2 F. r. = 5. Alles positiv; hieraus entspringt

a) die Multiplication 2 F. r. × 5 = 10 F. r.

b) die Division 10 F. r. : 5 = 2 F. r.

Auch hier ist alles positiv. So findet sich die Regel: Bei Multiplication und Division gibt + und + zum Resultate +.

2) $\overline{10}$ F. r. : $\overline{2}$ F. r. = 5.

Der Dividendus, oder die zu messende Größe, und der Divisor, oder die Größe, womit gemessen werden soll, sind einstimmig; beide bedeuten eigentlich Linien, welche links hin liegen, daher muß die ihr Verhältniß ausdrückende Zahl, der Quotient, positiv seyn. Bei der Division einer Größe durch eine gleichartige gibt also — in — zum Resultate +.

Man erhält hieraus.

a) $\overline{2}$ F. r. × 5 = $\overline{10}$ F. r.

Bei der Multiplication gibt eine negative Größe und eine positive Zahl eine negative Größe.

b) $\overline{10}$ F. r. : 5 = $\overline{2}$ F. r.

Die Division einer negativen Größe durch eine positive Zahl gibt eine negative Größe.

3) $10\ \text{F.r.} : \overline{2}\ \text{F.r.} = \overline{5}$.

Divisor und Dividendus sind entgegengesetzt, daher der Quotient eine negative Zahl. So gibt also hier — in + für den Quotienten —.

a) $\overline{2}\ \text{F.r.} \times \overline{5} = 10\ \text{F.r.}$

Eine negative Größe durch eine negative Zahl multiplicirt gibt eine positive Größe.

b) $10\ \text{F.r.} : \overline{5} = \overline{2}\ \text{F.r.}$

Hier gibt — in + —.

4) $\overline{10}\ \text{F.r.} : 2\ \text{F.r.} = \overline{5}$.

Auch hier sind die Einheit und die zu messende Größe entgegengesetzt, also der Quotient eine negative Zahl. + in — gibt —.

a) $2\ \text{F.r.} \times \overline{5} = \overline{10}\ \text{F.r.}$

Eine positive Größe mit einer negativen Zahl multiplicirt, gibt eine negative Größe.

b) $\overline{10}\ \text{F.r.} : \overline{5} = 2\ \text{F.r.}$

Auch hier hat man: — in — gibt +.

So gilt also die Regel, welche oben, § 3, für die Multiplication und Division an bloßen Zahlen gegeben ward, auch hier: Gleiche Zeichen geben +, ungleiche —. Man kann also überhaupt mit Größen, woran der Additionsgegensatz auf obige Weise ausgedrückt ist, rechnen, sobald man nur mit additiv entgegengesetzten Zahlen zu rechnen versteht; und so zeigt sich auch hier die

Zweckmäßigkeit, den Gegensatz der Größen durch den Gegensatz der Zahlen zu bezeichnen.

Diese Rechnungsregeln für Größen zu Grunde gelegt, läßt sich nun auch auf eine besondere Weise zeigen, daß dieselben auch auf die Weise für bloße Zahlen Statt finden müssen, so wie sie oben §. 3. II. angegeben wurden; indem man sich nämlich eine Größe denkt, an der nach einander zwei Rechnungen mit bloßen Zahlen, und zwar entweder Multiplication oder Division, vorgenommen werden sollen.

Um z. B. zu zeigen, daß auch bei der Multiplication von zwei bloßen Zahlen — mit — zum Zeichen des Products + gibt, sehe man eine Größe A als gegeben an, welche mit zwei negativen Zahlen, etwa $\bar{3}$ und $\bar{2}$, nach einander multiplicirt werden soll. Diese Multiplication gäbe: $A . \bar{3} . \bar{2} = \bar{3} A . \bar{2} = 6 A$; dieß Resultat muß auch erscheinen, wenn man sagt: $A . \bar{3} . \bar{2} = A . (\bar{3} . \bar{2}) = (\bar{3} . \bar{2}) . A$; sollen also beide Resultate übereinstimmen, so muß $\bar{3} . \bar{2} = 6$ seyn, so gibt hier — mit — +.

Auf gleiche Weise ist $A . \bar{3} : \bar{2} = \bar{3} A : \bar{2} = + \frac{3}{2} A$; aber es ist auch $A . \bar{3} : \bar{2} = A . (\bar{3} : \bar{2}) = (\bar{3} : \bar{2}) . A$; es muß also $\bar{3} : \bar{2} = + \frac{3}{2}$ seyn; so gibt also auch hier — in — +.

§. 7.

Die Idee des Additionsgegensatzes läßt sich noch folgendermaßen durch Vergleichung mit dem Multiplicationsgegensatze aufhellen.

Zwei gleichartige Größen A und B kann man auf zwei verschiedene Arten mit einander vergleichen, nämlich

1) indem man zusieht, wie vielmal die eine größer oder kleiner ist, als die andere (indem man ihr sogenanntes geometrisches Verhältniß aufsucht). Hier sind die Zahlen, welche die Werthe von A : B und B : A sind, multiplicativ entgegengesetzt. Ist z. B. $A : B = \frac{5}{3}$, so ist $B : A = \frac{3}{5}$;

2) indem man zusieht, um wie viel die eine größer oder kleiner ist, als die andre (indem man ihr sogenanntes arithmetisches Verhältniß aufsucht). Die Größen B — A und A — B sind hier additiv entgegengesetzt. Ist z. B. B = 7 Fuß rechts, A = 5 Fuß rechts, so ist B — A = 2 Fuß rechts, aber A — B = $\bar{2}$ Fuß rechts.

Dieß läßt sich auch auf die beiden verschiedenen Arten der Vergleichung von Zahlen, durch Subtraction und durch Division anwenden.

§. 8.

Wie (nach §. 2. VIII.) die positiven und negativen Zahlen, so kann man auch positive und negative Größen in eine Reihe gestellt denken, deren Gränzen sind + ∞ und — ∞, und in deren Mitte o liegt. So kann man also auch diese Symbole o, + ∞ und — ∞, eben so gut als Größen, wie als Zahlen betrachten. Sieht man aber die positiven Größen als negative, die negativen als positive an, so wird + ∞ in — ∞ verwandelt, und — ∞ in + ∞. (Bei Zahlen ist diese Vertauschung des + ∞ mit — ∞ nicht möglich). Aber o läßt sich, auch als Größe, sowol als negativ wie als positiv betrachten.

Sieht man auf die bloße Quantität der Größen: so sind die positiven desto größer, je mehr sie sich dem + ∞, die negativen, je mehr sie sich dem — ∞ nähern. Eine positive Größe ist, bloß der Quantität nach, einer negativen, sonst mit ihr übereinstimmenden, gleich.

Wollte man die negativen Größen kleiner als die positiven, kleiner als o nennen: so könnte man dieß nur in Hinsicht auf die Wirkungen der Addition der positiven und der negativen Größen zu einer positiven. Hier vergrößert die Addition einer positiven Größe jene positive, zu der man addirt; die Addition einer negativen verkleinert sie. In Betracht der bloßen Quantität kann man aber

nicht sagen, die negativen Größen seyen kleiner als o.

Etwas ganz Aehnliches findet auch bei den Zahlen Statt. Die Addition einer positiven vergrößert, die Addition einer negativen verkleinert eine positive Zahl. Eine negative Zahl wäre in dieser Hinsicht kleiner als o, kleiner als eine Zahl, deren Addition nichts ändert.

Sieht man auf das Verhalten der positiven und der negativen Größen oder Zahlen bei der Multiplication und der Division: so kann man die Sätze

Ein Product ist desto größer, je größer die Factoren sind;

Ein Quotient ist desto größer, je größer der Dividendus und je kleiner der Divisor ist;

bloß in Bezug auf die absolute Größe der Zahlen und Größen aussprechen.

§. 9.

Aeußerst wichtig sind die Anwendungen, die man vom Additionsgegensatze in der Buchstabenrechnung macht.

Die Buchstabenrechnung stellt Gleichungen auf, welche bloß unbestimmte Zahlen enthalten, die durch Buchstaben bezeichnet sind, statt deren man

beliebige Zahlen setzen darf. Z. B. $(a+b).(a+c) = a^2+ab+ac+bc$. Nach dieser Gleichung, als Formel, kann man auch Zahlengleichungen aufstellen, und z. B. berechnen

$$(5+2).(5+3)=5^2+5.2+5.3+2.3$$
$$=25+10+15+6=56$$

Aber man kann einen jeden Buchstaben in einer solchen Gleichung auch eine negative Zahl bedeuten lassen, und ihr dadurch eine weit größere Anwendbarkeit geben, als sie außerdem gehabt haben würde. Z. B. die Gleichung

$$(a+b).(a+c) = a^2+ab+ac+bc$$

läßt sich auch anwenden auf

$$(7+3).(7-2)$$

wenn man setzt

$$a = 7$$
$$b = 3$$
$$c = -2$$

denn es ist $(7+3).(7-2) = (7+3).(7+\bar{2})$.

Die Formel gibt dann

$$(7+3).(7-2) = 7^2+7.3+7.\bar{2}+3.\bar{2}$$
$$= 49+21+\overline{14}+\bar{6}$$
$$= 49+21-14-6 = 50.$$

Man kann selbst auf eine ähnliche Weise aus der Formel für $(a+b).(a+c)$ eine für $(a+b).(a-c)$ ableiten, denn der erste Ausdruck geht in

letztern über, wenn man darin statt $\bar{c}$ setzt c, denn es ist

$$(a+b).(a-c) = (a+b).(a+\bar{c})$$

da nun $(a+b).(a+c) = a^2+ab+ac+bc$

so ist $(a+b).(a+\bar{c}) = a^2+ab+a.\bar{c}+b.\bar{c}$

$$= a^2+ab+\overline{ac}+\overline{bc}$$

oder $(a+b).(a-c) = a^2+ab-ac-bc.$

Auf ähnliche Weise findet man auch aus der Formel $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ eine Formel für $(a-b)^2$.

Denn es ist $a-b = a+\bar{b}$

aber $(a+\bar{b})^2 = a^2+2a.\bar{b}+(\bar{b})^2$

und da $2a\bar{b} = \overline{2ab}$

$(\bar{b})^2 = b^2$

so ist $(a+\bar{b})^2 = a^2+\overline{2ab}+b^2$

oder $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

Sehr leicht findet sich die Regel:

Hat man zwei verschiedene Ausdrücke [wie $(a+b)^2$ und $(a-b)^2$], welche sich nur durch die Zeichen + und — unterscheiden, und der eine läßt sich in den andern dadurch verwandeln, daß man statt eines oder einiger Buchstaben darin die additiv entgegengesetzten setzt: so kann man auch einen Ausdruck [$a^2+2ab+b$], der einem der gegebenen Ausdrücke [$(a+b)^2$] gleich ist, in einen andern verwandeln, der dem andern [$(a-b)^2$] der

gegebenen Ausdrücke gleich ist, wenn man auch darin statt jener Buchstaben die additiv entgegengesetzten setzt. Dabei ziehen Potenzen von dergleichen Buchstaben, welche von geradem Range sind, keine Veränderung der vorzüsetzenden Zeichen nach sich, so wie in den beiden Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

und $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

das Glied b^2 ein und dasselbe Zeichen, $+$, hatte.

Hienach findet sich auch sehr leicht aus

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

die Formel $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

u. aus $(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$

ergibt sich

$$(a-b-c)^2 = a^2 - 2ab + b^2 - 2ac + 2bc + c^2$$

§. 10.

Hieraus wird sich nun die Anwendbarkeit des Additionsgegensatzes in der Algebra leicht begreifen lassen.

Die Gleichungen, womit sich die Algebra beschäftigt, enthalten durch Buchstaben ausgedrückte unbekannte Zahlen, deren Werthe eben durch die algebraische Auflösung der Gleichungen gesucht werden. Außer diesen unbekannten Zahlen enthält eine algebraische Gleichung entweder bloß noch bestimmte Zahlen, z. B. bei $5x + 13 = 7x + 9$, oder sie enthält auch unbestimmte durch Buch-

staben ausgedrückte Zahlen, wie z. B. die Gleichung $ax + b = cx + d$.

Der Additionsgegensatz läßt sich nun in der Algebra auf doppelte Weise anwenden, nämlich:

1) indem man sich erlaubt, unter den in einer oder mehren Gleichungen vorkommenden Buchstaben, welche unbestimmte Zahlen andeuten, auch negative Zahlen zu verstehen.

2) indem man auch negative Werthe, welche bei der Auflösung für die unbekannten Zahlen gefunden werden, nicht geradezu als ungereimt ansieht, sondern auch diese gehörig zu deuten und zu benutzen sucht.

Beide Anwendungsarten mögen an einem einzigen Beispiele gezeigt werden, nämlich bei der Beantwortung folgender allgemeinen Aufgabe:

Zwei Körper, die so klein sind, daß man sie hier als Puncte denken kann, sie mögen K′, K″ heißen, bewegen sich in einer unbegränzten geraden Linie, jeder mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Man kennt zwei Puncte A′, A″, in denen sich dieselben zu gleicher Zeit (K in A′, K″ in A″) befinden. Man kennt auch die Richtung, in der sich ein jeder dieser Körper bewegt, so wie auch die Geschwindigkeit, womit sich jeder bewegt. Hieraus soll man den Punct in der

Linie bestimmen, wo diese Körper zusammentreffen werden.

Der gesuchte Punct mag B heißen.

Es können bei dieser Aufgabe sehr verschiedene Fälle Statt finden. Vorzüglich ist dabei zu berücksichtigen, daß jeder Körper nach zwei verschiedenen Richtungen, sie mögen rechts und links heißen, sich bewegen kann. Ein besonderer Fall soll zu Grunde gelegt werden, welcher leicht die allgemeine Auflösung herbeiführen wird.

Alle Linien, die durch Bewegung rechts hin entstanden gedacht werden, sollen hier positiv heißen. Die Linie A′A″ [Fig. 1] sey positiv, d. h. A″ liege rechts von A′; beide Körper sollen sich nach der rechten Seite hin bewegen; die Geschwindigkeit von K′ soll dadurch bestimmt werden, daß er in einer Secunde eine positive Linie = C′ zurücklege; dagegen K″ soll in einer Secunde eine Linie = C″ beschreiben. Endlich mag K′ sich geschwinder bewegen als K″, also C′ größer seyn als C″: so ist klar, daß der sich geschwinder bewegende Körper K′ endlich den andern K″ einholen wird in einem Puncte B, welcher rechts von A″ liegt, so daß sowol A′B als A″B positiv sind.

Der Weg, den K′ von dem Augenblicke an, wo die Körper in A′ und A″ waren, bis zum Zusammentreffen zurücklegt, ist also A′B.

Der Weg, den K'' in derselben Zeit zurücklegt, ist $A''B$.

Diese Wege müssen sich verhalten wie die Geschwindigkeiten beider Körper, oder es muß seyn

$$A'B : A''B = C' : C''$$

Gegen die Richtigkeit dieser Proportion ist auch von Seiten der Zeichen nichts einzuwenden, da alle Glieder darin positiv sind.

Nun ist $A''B = A'B - A'A''$; dieß in die Proportion gesetzt, gibt

$$A'B : A'B - A'A'' = C' : C''$$

Diese Proportion zwischen vier Linien kann auf eine Proportion zwischen vier Zahlen zurückgebracht werden, wenn man sich vorstellt, daß alle diese Linien mit einerlei Einheit gemessen werden, welche auch rechts hin liegend gedacht wird. Finden sich dann

für die Größen $A'A''$, $A'B$, C', C'',
die Zahlen a, x, c', c''

wo die Zahl x unbekannt ist, so entsteht aus der Größenproportion $A'B : A'B - A'A'' = C' : C''$ die Zahlenproportion $x : x - a = c' : c''$.

Hieraus folgt

$$c' . (x-a) = c'' . x$$

$$c' . x - c' . a = c'' . x$$

$$(c' - c'') . x = c' . a$$

$$x = \frac{c'a}{c' - c''}.$$

Der Zahlenwerth dieser Formel gibt die un-

bekannte Linie $A'B$ in Bezug auf dieselbe Einheit, wodurch die Linie $A'A''$ gemessen wurde. Er ist in obigem Falle, wo die Zahlen a, c', c'' positiv seyn sollen, und wo $c' > c''$ seyn soll, gewiß auch positiv.

Durch diese Auflösung ist die Aufgabe für den angenommenen Fall, wo c' c'' beide positiv und $c' > c''$, vollkommen beantwortet; es fragt sich aber, ob und in wie fern diese Auflösung auch in den andern möglichen Fällen richtig ist. Es mögen zuerst nur ein paar dieser andern Fälle betrachtet, und es mag untersucht werden, was die gefundene Formel für dieselben gibt.

1. Der Körper K' bewege sich rechts, seine Geschwindigkeit werde durch die positive Zahl c' ausgedrückt; K'' bewege sich dagegen links, beschreibe in einer Secunde die negative Linie C'', so daß seine Geschwindigkeit durch die negative Zahl c'' ausgedrückt werde. In diesem Falle ist in $\frac{c'.a}{c'-c''}$ der Nenner eine positive Zahl, denn da c'' negativ ist, so ist $\overline{c''}$ positiv, also $c'-c'' = c' + \overline{c''}$ positiv; ferner ist auch dieser Nenner $c'-c''$ größer als c', folglich ist, da auch $c'a$ positiv ist, auch $x = \frac{c'a}{c'-c''}$ positiv und kleiner als a, so daß dadurch ein Punct B bestimmt

wird, der zwischen A' und A'' liegt. Es ist aber leicht einzusehen, daß in diesem Falle beide Körper sich auch wirklich zwischen A' und A'' begegnen werden.

2. Beide Körper mögen sich nach der rechten Seite hin bewegen, aber K'' geschwinder als K'. Dann sind c' und c'' beide positiv, aber $c' < c''$ und daher $c' - c''$ negativ, also in der Formel $\frac{c'a}{c' - c''}$ der Zähler positiv, der Nenner negativ, mithin der Werth von x negativ; dadurch wird ein Punct B links von A' bestimmt. Was soll diese Antwort bedeuten? Eine leichte Betrachtung zeigt, daß die beiden Körper, indem sie von A' und A'' aus rechts hin fortrücken, sich immer weiter von einander entfernen, also nie zusammenstoßen können; dagegen, wenn man annimmt, sie seyen schon früher in Bewegung gewesen, so ist es denkbar, daß sie in einem Puncte B, der links von A' liegt, zusammentrafen, worauf sie sich weiter fortbewegten und dann zugleich, der eine nach A' der andere nach A'' kamen. (Ein wirkliches Zusammenstoßen zweier undurchdringlicher physischer Körper hätte freilich die Bewegung gehemmt; dieß braucht aber hier nicht berücksichtigt zu werden). Der negative Werth von x kann nichts anders, als die Entfernung des von A' links liegenden Punctes B eben von A' ausdrücken. So liegt also in obi-

ger Aufgabe ein Fall, der in ihrem Ausdrucke gar nicht mit angedeutet war, den aber die Algebra zugleich mit beantwortet. Will man denselben mit in den Ausdruck der Aufgabe aufnehmen, so kann man so sagen:

Zwei Körper bewegen sich in einer unbegränzten geraden Linie, jeder mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Man kennt zwei Puncte A', A'', in denen sich dieselben zu gleicher Zeit befinden, so wie auch die Richtungen und die Geschwindigkeiten der Bewegungen. Man soll den Punct finden, wo diese Körper entweder zusammentreffen werden, oder wo sie schon vorher haben zusammentreffen können.

Jetzt mag in aller Strenge gezeigt werden, daß die oben gefundene Formel in allen Fällen vollkommen richtig seyn muß, die dabei in Hinsicht auf die Richtungen und die Geschwindigkeiten der sich bewegenden Körper Statt finden können.

Zu diesem Zwecke ist es nothwendig, die ursprünglichen Gleichungen zu betrachten, und zu untersuchen, ob sie in allen Fällen richtig sind; dann wird sich leicht einsehen lassen, ob die daraus abgeleitete Formel auch in allen Fällen richtig ist, oder nicht.

Die zu Grunde gelegte Proportion ist

$$A'B : A''B = C' : C''$$

In Hinsicht der bloßen Quantität der Linien, welche sie enthält, muß sie allgemein giltig seyn, denn sie entspringt aus dem allgemein giltigen Satze, daß die Wege, welche zwei mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich bewegende Körper in gleicher Zeit durchlaufen, sich immer eben so verhalten, wie zwei Wege, die sie mit eben denselben Geschwindigkeiten in einer andern Zeit durchlaufen. Es fragt sich aber noch, ob diese Proportion auch in Hinsicht der Zeichen, welche die darin enthaltenen Linien behaften können, immer richtig ist. Es ist nämlich zur Vollkommenheit der Gleichung nothwendig, daß die Zahlen $A'B : A''B$ und $C' : C''$ auch in ihren Zeichen übereinstimmen, daß sie beide positiv oder beide negativ sind. Man muß die verschiedenen Fälle untersuchen, welche bei dieser Aufgabe Statt finden können. Nach der Lage von B gibt es dabei drei Fälle:

1) [Fig. 2.] B liegt rechts von A'', wie B', sowol $A''B$ als $A''B'$ ist hier positiv, also auch die Zahl $A'B' : A''B'$. Daraus folgt, daß C' und C'' nur beide positiv oder beide negativ seyn dürfen, wenn die Proportion richtig seyn soll. Und wirklich sieht man leicht, daß B bloß dann rechts von A'' liegen kann, wenn entweder a) beide Körper sich rechts hin bewegen, und zwar K' geschwin-

der als K'', in welchem Falle C' und C'' positiv sind; oder b) wenn sich beide Körper links hin bewegen, und zwar K' geschwinder als K'', in welchem Falle die Körper, schon ehe sie nach den Puncten A' und A'' kamen, rechts von A'' hatten zusammentreffen müssen; in diesem Falle sind C', C'' wieder von gleichen Zeichen, beide negativ. — In diesem Falle ist also die Proportion völlig richtig.

2) B liegt zwischen A' und A'', wie in B''. Hier ist A'B'' positiv, A''B'' negativ, also A'B'' : A''B'' eine negative Zahl; es ist daher nöthig, daß auch die Linien C' und C'' von verschiedenen Zeichen sind, die eine positiv die andre negativ. Nun sieht man leicht ein, daß B nur dann zwischen A' und A'' liegen kann, wenn entweder a) K' sich rechts, K'' sich links hin bewegt, wo sie sich zwischen A' und A'' treffen; in diesem Falle sind C' und C'' wirklich von verschiedenen Zeichen, C' ist positiv, C'' negativ; b) oder wenn K' sich links, K'' sich rechts hin bewegt; in diesem Falle kann kein weiteres Zusammentreffen beider Körper erfolgen, es muß schon zwischen A' und A'' Statt gefunden haben; hier ist aber C' negativ, C'' positiv, also wirklich beide von verschiedenem Zeichen. — Also auch hier ist die Proportion richtig.

3) B liegt links von A', wie in B'''. Hier

ist sowol $A'B$ als $A''B$ negativ; daher ist zur Richtigkeit der Proportion erforderlich, daß C' und C'' entweder beide positiv oder beide negativ sind. Nun kann B bloß dann links von A' liegen, wenn entweder a) beide Körper sich links hin bewegen, und zwar K'' geschwinder, als K', dann sind C', C'' beide negativ; b) oder wenn beide Körper sich rechts hin bewegen, K'' geschwinder als K'; hier sind C' und C'' beide positiv. — Also auch in diesem Falle ist die Proportion auch in Hinsicht der Zeichen richtig.

Wir haben also hier folgende Fälle betrachtet:

Beide Körper bewegen sich rechts, und K' geschwinder als K''; dieser Fall kam vor in 1. a.

Beide Körper bewegen sich rechts, aber K'' geschwinder. — In 3. b.

K' bewegt sich rechts, K'' links. — In 2. a.

K' links, K'' rechts. — In 2. b.

Beide Körper bewegen sich links, K' geschwinder. — In 1. b.

Beide Körper links, K'' geschwinder. — In 3. a.

Es sind also in dieser Betrachtung alle möglichen Fälle erschöpft, und es ergibt sich daraus, daß die Proportion $A'B : A''B = C' : C''$ jedesmal richtig ist. Es fragt sich aber, ob die Verwandlungen, welche diese Proportion litt, um

die Auflösung zu vollenden, auch bei der Anwendung des Additionsgegensatzes bestehen.

Eine leichte Ueberlegung zeigt, daß man, B mag liegen, wo es will, statt $A''B$ immer setzen kann $A'B - A'A''$; so findet also auch die Proportion

$$A'B : A'B - A'A'' = C' : C''$$

immer Statt, und daher auch die Zahlenproportion

$$x : x - a = c' : c''$$

deren 4 Glieder immer die richtigen Zahlenwerthe für die vier Glieder der letzten Größenproportion enthalten.

Wenn aber die Proportion

$$x : x - a = c' : c''$$

richtig ist, so müssen auch die andern Gleichungen, welche nach der Methode der Algebra daraus hergeleitet sind, immer richtig seyn. So folgt also, daß auch die zuletzt gefundene Formel

$$x = \frac{c' \cdot a}{c' - c''}$$

in allen möglichen Fällen die richtige Auflösung geben muß, daß die Zahl x sowol die Größe als die Lage von $A'B$ richtig geben muß.

Wie in diesem Beispiele, so muß man bei ähnlichen Untersuchungen über die Giltigkeit einer gefundenen Formel immer die Giltigkeit der zu Grunde liegenden Gleichungen untersuchen, aus denen die Formel abgeleitet ist. Auch in dem Ab-

schnitte über die Anwendung des Additionsgegensatzes in der Geometrie, bei der algebraischen Behandlung geometrischer Aufgaben, wird sich dieses an manchen Beispielen bemerken lassen.

Aeußerst deutlich zeigt sich auch an dem obigen Beispiele, wie bequem bei der algebraischen Auflösung einer Aufgabe so häufig die Anwendung des Additionsgegensatzes ist.

Wer die bisher vorgetragene Theorie des Additionsgegensatzes nicht annehmen, wer denselben ganz verwerfen wollte, der müßte die obigen verschiedenen Fälle einzeln vornehmen, um sie algebraisch zu behandeln. So müßte er z. B. in dem Falle, wo sich K' rechts, K'' links hin bewegt, zuerst überlegen, daß sich hier beide Körper zwischen A' und A'' treffen würden, daß also B zwischen A' und A'' läge. Hier würde, da auch $A''B$ für positiv gelten müßte,

$$A''B = A'A'' - A'B$$

seyn. Es werde nun C' ausgedrückt durch die Zahl γ', C'' durch γ'', $A'B$ durch y, so kommt:

$$\begin{aligned} y : a - y &= \gamma' : \gamma'' \\ \gamma'' y &= \gamma' a - \gamma' y \\ (\gamma' + \gamma'') \cdot y &= \gamma' a \\ y &= \frac{\gamma' a}{\gamma' + \gamma''} \end{aligned}$$

dieser Werth für y stimmt ganz mit dem oben für x gefundenen überein, wenn man setzt

$$\gamma' = c'$$
$$\gamma'' = \overline{c''}.$$

So zeigt sich sehr deutlich, welche Vortheile die Anwendung des Additionsgegensatzes in der Algebra mit sich führt.

§. 11.

Wer in der Theorie des Additionsgegensatzes keine Unbegreiflichkeiten finden will, der muß sich daran erinnern, daß man nicht eine Größe mit einer Größe multipliciren kann, und daß es keine Potenzen von Größen, sondern bloß von Zahlen gibt.

Zwei negative Zahlen geben ein positives Product, d. h. ein Product mit einem Zeichen, das dem ihrigen entgegengesetzt ist, während zwei positive ein positives Product geben, d. h. eine Zahl mit demselben Zeichen, wie jene Zahlen selbst hatten. Wollte man auch Multiplication von zwei Größen annehmen, so müßte man hiebei es sehr unbegreiflich finden, daß positive Größen ein Product von demselben Zeichen, negative ein Product von entgegengesetztem gäben, was sich nicht damit vereinen ließe, daß man die positiven Größen auch als negative, die negativen als positive betrachten könnte; denn wie wollte man es erklären, daß zwei Linien, die von einem Puncte aus rechts liegen, so lange man sie als positiv ansähe, eine

ebenfalls rechts hin liegende Linie, daß dagegen dieselben Linien, als negativ betrachtet, eine links hin liegende geben müßten? Diese Widersprüche fallen sogleich weg, sobald man die Unstatthaftigkeit einer Multiplication einer Größe durch eine andere kennt.

Auf ähnliche Weise würde es auch unbegreiflich seyn, wie die Quadratwurzel aus einer Linie, sobald man dieselbe als positiv ansähe, möglich, sobald man sie als negativ betrachtete, unmöglich seyn könnte. Diese Unbegreiflichkeit fällt ebenfalls gleich weg, wenn man sich erinnert, daß es keine Quadratwurzeln, so wie überhaupt keine Potenzen (auch Wurzeln kann man ja als Potenzen betrachten) von Größen, sondern bloß von Zahlen gibt.

§. 12.

Nach §. 2. V ist es gleichgiltig, ob man die Zahl 0 ansieht als positiv oder als negativ. Wendet man dieses auf den Quotienten an, der sich findet, wenn man irgend eine wirkliche Zahl (nicht 0) z. B. 1 durch 0 dividirt, welchen Quotienten man unendlich groß nennt, und durch ∞ bezeichnet: so ergibt sich, daß man auch diesen Quotienten sowol als negativ wie als positiv betrachten kann. Daher kann man schreiben:

$$\frac{1}{0} = \pm \infty.$$

umgekehrt ist $\frac{1}{+\infty} = 0.$

$$\frac{1}{-\infty} = 0.$$

Eine positive Zahl kann durch wiederholtes Abziehen einer positiven Zahl immer kleiner gemacht, in 0, und dann in eine negative Zahl verwandelt werden; auf ähnliche Weise verhält es sich mit den Größen. Daher kann man sagen: Eine Zahl oder Größe kann aus dem positiven Zustande, indem sie durch 0 geht, in den negativen übergehen. Man kann dieses fortwährende Verringern auch als ein continuirliches Abnehmen denken, wobei die sich verändernde Zahl oder Größe aus keinem Zustande in einen andern vermittelst eines Sprunges übergeht, sondern so, daß sie dabei alle Zwischenzustände durchläuft.

Nun aber betrachte man den Quotienten einer Division einer beständigen Zahl, etwa 1, durch eine andere veränderliche, welche, auf jene Weise, aus dem positiven Zustande durch 0 in den negativen übergeht. So lange Dividendus und Divisor von gleichem Zeichen sind, ist der Quotient positiv; der Quotient nimmt zu, so wie der Divisor abnimmt; ist der Divisor = 0, so ist der Quotient = ∞, was sowol mit + als mit — gedacht werden kann; endlich, bekommt der Divisor

das entgegengesetzte Zeichen, von dem des Dividendus, so ist der Quotient eine negative Zahl, die anfangs, bei kleinem Divisor, sehr groß ist, aber kleiner wird, so wie der Divisor wächst. In dieser Betrachtung findet man Grund zu sagen: Eine Zahl oder auch eine Größe kann durch $\pm \infty$ aus dem $+$ in $-$ übergehen, oder umgekehrt aus $-$ in $+$.

Die Idee von $+\infty$ und von $-\infty$, also einem ∞, das entweder bloß mit $+$ oder bloß mit $-$ gedacht wird, entsteht unmittelbar, indem man sich Gränzen vorstellt, denen sich die positiven und die negativen Zahlen beim Größerwerden nähern. Die Idee von $\pm \infty$, d. h., von einem ∞, das zugleich mit $+$ und mit $-$ gedacht werden kann, ist nur mittelbar gewonnen, nämlich vermittelst der Vorstellung der Division einer Zahl durch o.

Noch mag erwähnt werden, daß man ganz auf gleiche Weise sich auch die Division einer Größe durch die Zahl o vorstellen kann, woraus als Quotient eine unendlich große Größe entstehen muß, die man ebenfalls zugleich als positiv und als negativ denken kann. Man kann selbst den Divisor o nicht als Zahl, sondern als Größe denken, dann ist der Quotient bei der Division einer Größe durch die (gleichartig gedachte) Größe o die Zahl $\pm \infty$.

Wenn eine Zahl oder Größe durch 0 geht, so geht sie nicht nothwendig aus + in — über. Z. B. der Ausdruck $(a - x)^2$ hat den Werth 0, wenn $x = a$; bei jedem andern Werthe von x aber, x mag kleiner oder größer seyn als a, hat er einen positiven Werth, er geht also nie aus + in — über.

In diesem Abschnitte ward zuerst (§. 2, 3) bloß der Additionsgegensatz der Zahlen, und zwar auf eine sehr unvollständige Weise untersucht, so weit es nämlich dort möglich war, wo der Begriff des Additionsgegensatzes nur als ein dem des Multiplicationsgegensatzes analoger Begriff aufgestellt worden war. Dieser eingeschränkte Begriff vom Additionsgegensatze reichte jedoch schon hin, um auch den Gebrauch desselben in der Buchstabenrechnung einzusehen. Doch konnte er dort nur erst als eine zweckmäßige Einführung zur Erleichterung oder zur Verallgemeinerung von Zahlenrechnungen angesehen werden, da man dort noch gar nicht im Stande war, einzusehen, wie negative Zahlen auch Ausdrücke des Verhältnisses gleichartiger Größen seyn könnten. Die Theorie des Additionsgegensatzes erhielt ihren höchsten Werth erst durch die nachher angestellte Untersuchung, wie auch Größen, und wie Zahlen, die das Ver-

hältniß gleichartiger Größen ausdrücken, negativ seyn können. Jetzt ist nur noch die für die reine Mathematik äußerst interessante Untersuchung übrig, wie der Additionsgegensatz bei einer ganz besondern Classe von Größen, bei den Größen des Raums, anwendbar ist.

Zweiter Abschnitt.

Grundsätze für die Anwendung des Additionsgegensatzes in der Geometrie.

---

§. 13.

Die Untersuchung über den Gebrauch des Additionsgegensatzes in der Geometrie läßt sich führen, indem man zuerst fragt, wie er in der Euthynomie, dann wie er in der Epipedonomie, endlich wie er in der Stereonomie angewandt werden kann.

In der Euthynomie sind die einzigen Größen, welche in Betracht kommen, die geraden Linien, und es fragt sich bloß, wie gerade Linien, die in einer unbegränzten geraden Linie liegen, positiv oder negativ seyn können. Diese Untersuchungen sind keinen Schwierigkeiten unterworfen, und selbst durch das zweite Beispiel in §. 5. I. schon einigermaßen vorbereitet.

Bei weitem schwieriger ist die Untersuchung über den Additionsgegensatz in der Epipedonomie. Zu den geraden Linien kommen hier auch die krummen, so wie die gebrochnen Linien, die

Winkel und die Flächenräume; es ist die Frage, in wiefern man bei allen diesen Arten von Größen den Additionsgegensatz anwenden kann. Dann ist dabei sehr zu berücksichtigen, daß hier auch die geraden Linien nicht alle in einer unbegränzten geraden Linie, sondern nur in einer Ebene liegen müssen, welcher Umstand auch besondere Betrachtungen verursacht.

Noch zusammengesetzter sind die Untersuchungen über den Additionsgegensatz in der Stereonomie; doch lassen sich in der Hauptsache die Untersuchungen über den Additionsgegensatz in der Epipedonomie meistens sehr leicht auf stereonomische Constructe ausdehnen. Es mag daher im Folgenden genug seyn, den Additionsgegensatz in der Euthynomie und in der Epipedonomie zu untersuchen.

§. 14.

Additionsgegensatz gerader Linien in euthynomischen Constructen.

I. Bei einer begränzten geraden Linie, welche ein Stück einer unbegränzten ist, kann man außer ihrer Größe auch berücksichtigen, welchen ihrer Gränzpuncte man als Anfangspunct, welchen man als Endpunct betrachten soll, d. h. man kann angeben, wenn man sich diese Linie als

durch Bewegung eines Punctes entstehend denkt, wo die Bewegung anfangen, wo sie endigen soll. Der Anfangspunct einer Linie wird bei ihrer Bezeichnung durch ihre Gränzpuncte sehr zweckmäßig zuerst, ihr Endpunct zuletzt genannt. So heißt AB die Linie, deren Anfangspunct A, deren Endpunct B ist. *)

Sehr häufig ist es gleichgiltig, welchen Gränzpunct einer Linie man als Anfangs-, welchen man als Endpunct betrachten will.

Hat man aber mehrere Puncte in einer unbegränzten Linie, und will die Entfernungen dieser Puncte von einem und demselben Puncte in dieser unbegränzten Linie angeben: so ist es zweckmäßig, diesen letzten Punct als den gemeinschaftlichen Anfangspunct aller der Linien zu betrachten, welche jene Entfernungen ausdrücken. [Fig. 3.] Sollen z. B. die Entfernungen der Puncte a, b, c von A angegeben werden, so muß man A als den Anfangspunct der drei Linien betrachten, die jene Entfernungen ausdrücken; diese Linien heißen demnach Aa, Ab, Ac.

Nun ist klar, daß bloße Bestimmung der

---

*) Eine solche Bezeichnung schlägt auch Carnot in der Geometrie der Stellung I. Th. n. 87. S. 168 vor, aber er benutzt dieselbe nicht so, wie sie benutzt werden kann.

Größe von Aa, Ab, Ac nicht hinreicht, um die Lage der Puncte a, b, c vollkommen zu bestimmen; man muß auch wissen, nach welcher Seite von A aus jene Puncte liegen sollen. Diese Lage wird aber sehr gut bei Einführung des Additionsgegensatzes dadurch bezeichnet, daß man Linien, die nach der einen Seite liegen, positiv, die nach der andern hin liegenden negativ nennt. Ist in der Figur Aa, Ab positiv, so ist Ac negativ. Bei Anwendung dieser Methode ist das Construct Aabc durch Angabe der Linien Aa, Ab, Ac vollkommen bestimmt.

So ist also der Gebrauch des Additionsgegensatzes hier ein vollkommenes Mittel, um die Lage der Theile, welche in solchen euthynomischen Constructen vorkommen, genau zu bestimmen.

II. Eine jede gerade Linie kann sich selbst additiv entgegengesetzt gedacht werden, wenn man sie erst durch Bewegung nach einer Seite, dann durch Bewegung nach der andern entstanden denkt. So ist die Linie ab, worin a der Anfangspunct, entgegengesetzt der Linie ba, worin b der Anfangspunct. Es ist ab = — ba.

Wollte man die Linie Ab berechnen aus den Linien Aa, ab, welche den Gränzpunct a gemein haben, so könnte man leicht sehen, daß Ab entsteht, indem sich ein Punct von A nach a, und dann von a nach b bewegt. Jenes gibt die Linie

Aa, dieses die Linie ab; das Zusammenkommen beider Bewegungen wird in der Rechnung durch Addition ausgedrückt. Man hat also:

$$Aa + ab = Ab.$$

Die addirten Linien haben den Gränzpunct a gemein, der für die eine der Endpunct, für die andere der Anfangspunct ist. Die Summe ist eine Linie, welche den Anfangspunct der ersten Linie zum Anfangspuncte, den Endpunct der zweiten zum Endpuncte hat.

Wollte man aber die Linie Aa aus Ab und ab berechnen, so könnte man leicht sehen, daß Aa entsteht, wenn man sich zuerst von A nach b und dann von b nach a zurück bewegt, so entständen die Linien Ab, ba; das Zusammentreffen beider Bewegungen, die Addition dieser Linien, muß die Summe Aa geben; also ist

$$Ab + ba = Aa.$$

Diese Rechnung ist wirklich vollkommen richtig, wenn man Ab und ba mit entgegengesetzten Zeichen, etwa Ab positiv, ba negativ denkt. Die Addition des negativen ba zu dem positiven Ab gibt das positive Aa. Auch hier ist der Anfangspunct von ba einerlei mit dem Endpuncte von Ab, und die Addition hat zur Summe die Linie gegeben, welche den Anfangspunct der Linie Ab zum Anfangspuncte, den Endpunct von ba zum Endpuncte hat.

Aus diesen Beispielen wird Folgendes klar:

Man habe in einer unbegränzten geraden Linie drei Puncte P, Q, R; sie mögen gegen einander liegen, wie sie wollen. Es bewege sich ein Punct von P nach Q, dann von Q nach R, so wird durch dieses Fortbewegen, diese Addition der Linien PQ und QR, jener Punct in eine Entfernung von P versetzt, welche durch die Linie PR ausgedrückt wird; es ist folglich

$$PQ + QR = PR.$$

So zeigt sich an diesem Resultate der allgemein giltige Satz:

Die Addition von zwei geraden Linien, die in einer unbegränzten geraden Linie liegen, wobei der Anfangspunct der zweiten einerlei ist mit dem Endpuncte der ersten, gibt zur Summe eine Linie, die den Anfangspunct der ersten zum Anfangspuncte, den Endpunct der zweiten zum Endpuncte hat.

Mit Hülfe dieses Satzes kann man immer sehr leicht aus zwei Linien, die einen Punct zum gemeinschaftlichen Gränzpuncte haben, die Linie finden, welche die beiden andern Puncte, die in den gegebenen vorkommen, zu Gränzpuncten hat. Soll z. B. aus ac, bc berechnet werden ba, so hat man:

$$ba = bc + ca$$

Es ist aber $ca = - ac$

also auch $ba = bc + (- ac) = bc - ac.$

Dagegen wird $ab = ac + cb = ac - bc$ seyn. — Und diese Werthe von ba, ab konnte man finden, ohne die Figur zu betrachten, bloß durch Anwendung des obigen Satzes, woraus sein Werth sattsam erhellt.

Obiger Satz läßt sich aber noch bedeutend erweitern. Es bewege sich nämlich in einer unbegränzten geraden Linie ein Punct mehr als zweimal nach einander, z. B. viermal, nämlich zuerst von A nach B, dann von B nach C, dann von C nach D, endlich von D nach E: so wird die Entfernung von A, in der sich der Punct zuletzt befindet, durch die Linie AE gegeben. Jene Bewegungen haben aber die Linien AB, BC, CD, DE hervorgebracht, und, bei Annahme positiver und negativer Linien, muß die Addition dieser Linien, wie auch jene Puncte A, B, C, D, E gegen einander liegen mögen, zur Summe die Linie AE geben. Mithin ist

$$AB + BC + CD + DE = AE$$

Durch dieses Beispiel wird die Wahrheit des Satzes hinlänglich einleuchtend:

Werden mehrere gerade Linien addirt, welche Stücke einer unbegränzten Linie sind, und der Endpunct einer je-

den ist einerlei mit dem Anfangspuncte der folgenden, so daß jeder Punct doppelt genannt ist, ausgenommen der Anfangspunct der ersten, und der Endpunct der letzten Linie: so ist die Summe eine Linie, welche eben den Anfangspunct der ersten Linie zum Anfangspuncte, den Endpunct der letzten zum Endpuncte hat.

Ist hiebei der Endpunct der letzten Linie einerlei mit dem Anfangspuncte der ersten, so ist die Summe = o.

$$AB + BC + CD + DA = AA = 0$$

III. Noch mag eine besondre Art, ein euthynomisches Construct zu bestimmen, erwähnt werden, welche durch Anwendung des Additionsgegensatzes erst ihre Vollkommenheit erhält.

Soll ein euthynomisches Construct aus n Puncten a, b, c ... bestimmt werden, so kann dieß geschehen, indem man einen beliebigen Punct, einen Beziehungspunct, er werde durch B bezeichnet, hinzufügt. Dann wird das Construct abc ... durch Angabe der n Linien Ba, Bb, Bc..., welche alle den Beziehungspunct zum Anfangspuncte haben, vollkommen bestimmt, und diese Linien Ba, Bb, Bc ... heißen Abscissen der Puncte a, b, c ... Diese Abscissen können dann positiv und negativ seyn.

§. 15.

Additionsgegensatz gerader Linien in der Epipedonomie.

I. In einer unbegränzten Ebene können unendlich viel unbegränzte gerade Linien liegen, und in jeder können mehrere Puncte gegeben seyn, welche unter sich ein euthynomisches Construct bilden. Hieraus erhellt, daß der Gegensatz positiver und negativer gerader Linien, so wie wir ihn in der Euthynomie kennen gelernt haben, auch in der Epipedonomie sehr häufige Anwendung finden wird.

II. Wenn in einem euthynomischen Constructe eine positive Linie ab gegeben ist, und der Punct b rückt auf a zu: so wird dadurch diese Linie verkleinert; fällt b auf a, so ist ab zu o geworden; rückt b noch weiter fort, so wird ab negativ. So zeigt sich hier das Uebergehen einer Größe durch o aus dem positiven Zustande in den negativen, ein Gegenstand, wovon §. 12. geredet wurde.

Nun aber kann auch, nach §. 12, eine Zahl oder Größe aus dem positiven Zustande durch $\pm \infty$ in den negativen übergehen. Wird sich nicht auch so etwas von den geraden Linien, welche in einer unbegränzten Linie liegen, sagen lassen?

In der Euthynomie ist es bloß möglich, eine positive Linie durch fortwährende Bewegung eines Punctes über jede Gränze hinaus zu vergrößern,

d. h. so groß zu machen, daß sie irgend eine angenommene noch so große Linie an Größe übertreffe. Dagegen ist es unmöglich, die Linie wirklich unendlich groß zu machen, und dann durch fortgesetzte Bewegung den Punct auf die andre Seite vom Anfangspuncte zu versetzen, und dadurch jene positive Linie in eine negative übergehen zu lassen. — In der Epipedonomie dagegen läßt sich allerdings eine geometrische Operation finden, wobei ein Uebergang einer positiven Linie durch $\pm\infty$ in den negativen Zustand erfolgt. Nämlich so:

[Fig. 4.] Man habe eine unbegränzte gerade Linie, MN, in derselben einen Punct B, außer ihr den Punct A. Alle andre Puncte in MN mögen auf den Punct B bezogen werden; liegt ein Punct von B aus nach N zu, so soll gesagt werden, er liege rechts, und die Linien, die ihn zum Endpuncte, B zum Anfangspuncte haben, sollen positiv heißen; Linien dagegen, die von B aus links liegen, sollen negativ heißen. Man denke nun durch den Punct A eine unbegränzte gerade Linie RS gelegt, die die Linie MN in einem Puncte a schneide, und untersuche, in wie verschiedenen Lagen jene Linie RS gegen MN liegen könne.

Zuerst liege RS in R'S', so daß a' rechts von B liege, also Ba' positiv sey. Dann vergrößere man den Winkel BAS' durch Drehen der

Linie RS, so wird a weiter fortgerückt, Ba vergrößert. Diese Vergrößerung wird fortdauern, bis RS in die Lage R''S'' gekommen ist, wo es parallel mit MN liegt. Hier verschwindet der Schnittpunct a, und dieß kann man symbolisch dadurch ausdrücken, daß man sagt, Ba ist $= \pm \infty$ geworden, und man kann eben so gut sagen, a liege hier in unendlicher Entfernung links von B, wie rechts von B. Dreht man die Linie RS aus der Lage R''S'' nur ein klein wenig weiter, so wird sogleich der Schnittpunct a auf die linke Seite von B fallen, Ba wird, z. B. als Ba''', negativ seyn, wo RS in der Lage R'''S''' sich befindet. So fällt in die Augen, daß die Linie Ba hier aus + in — durch $\pm \infty$ überging. Dreht man aber noch weiter fort, so wird die negative Linie Ba immer abnehmen, bis sie zu o wird, worauf sie wieder positiv wird. Bei noch weiter fortgesetztem Drehen wird der Uebergang aus + in — durch $\pm \infty$ wieder erfolgen, kurz der Uebergang aus + in — durch $\pm \infty$ und aus — in + durch o werden hiebei ohne Aufhören abwechseln. Hätte man aber die Linie RS um A nach der entgegengesetzten Richtung herumgedreht, so würden dabei die Uebergänge aus + in — durch o, und aus — in + durch $\pm \infty$ Statt finden.

So hat man hier eine geometrische Operation;

das Drehen einer Linie RS, welche eine positive Größe zu einer negativen oder eine negative zu einer positiven macht, indem sie dieselbe durch $\pm \infty$ führt, so wie eine arithmetische Operation, die Division durch einen veränderlichen Divisor, ganz dasselbe thut (§. 12). Sowol in der Arithmetik als in der Geometrie zeigt sich also dieser Uebergang einer Größe durch $\pm \infty$ aus $+$ in $-$ weniger einfach, als der Uebergang aus $+$ in $-$ durch o, welcher bloß die Veränderung einer Größe — in der Geometrie die Bewegung eines Punctes — voraussetzt.

Bei der eben angestellten Betrachtung ging die Linie Ba abwechselnd durch $\pm \infty$ und durch o aus einem Zustande in den entgegengesetzten über. Dieß war nicht der Fall bei der §. 12 gegebenen Ableitung des Uebergangs durch $\pm \infty$ vermittelst der Vorstellung eines Bruches, dessen Nenner veränderlich ist. Man kann aber auch dort jenen Uebergang durch o hervorbringen, wenn man sich auch den Zähler des Bruchs veränderlich denkt, und bald ihn, bald den Nenner sich ändern läßt.

§. 16.

Gegensatz positiver und negativer Winkel.

I. Dem Gegensatze gerader Linien, die in einer unbegränzten geraden Linie liegen, ist der

Gegensatz von Winkeln äußerst ähnlich, welche einen und denselben Punct zur Spitze haben. Was für jenen Gegensatz der Linien die progressive Bewegung eines Punctes ist, das ist für diesen Gegensatz solcher Winkel die Drehung einer halbbegränzten geraden Linie um jene gemeinschaftliche Spitze der Winkel.

Eine halbbegränzte gerade Linie ist nur auf der einen Seite durch einen Gränzpunct begränzt, auf der andern ist sie unbegränzt. Das Construct eines Winkels entsteht, wenn zwei halbbegränzte Linien sich mit ihren Gränzpuncten berühren. Die halbbegränzten Linien sind die Schenkel des Winkels. Bei einem Winkelconstructe bemerkt man aber viele Winkelgrößen, indem der eine Schenkel auf verschiedene Weise durch Drehung in die Lage des andern versetzt werden kann.

Eine halbbegränzte Linie kann um ihren Gränzpunct nach zwei entgegengesetzten Richtungen, rechts oder links gedreht werden. Zwei solche entgegengesetzte Drehungen bringen Winkel von entgegengesetzten Zeichen hervor. Winkel, die durch Drehung links hin entstehen, mögen für positiv, die durch Drehung rechts hin entstehen, für negativ gelten.

Will man die Größe eines Winkels auffassen, indem man sich vorstellt, eine halbbegränzte Linie werde aus der Lage des einen Schenkels durch Dre=

hung in die Lage des andern Schenkels versetzt, so mag der Schenkel, von wo die Drehung ausgehen soll, der Anfangsschenkel, der, wo sie sich endigen soll, der Endschenkel heißen. In der Bezeichnung eines Winkels durch 3 Buchstaben soll der Buchstabe, der am Anfangsschenkel steht, zuerst, der am Endschenkel steht, zuletzt genannt werden. So heißt ABC der Winkel, dessen Anfangsschenkel ist AB, dessen Endschenkel ist BC.

II. A sey der Gränzpunct einer unbegränzten Linie. Sie liege zuerst in der Lage AP, werde dann in die Lage AQ, und dann in die Lage AR gedreht. So entstehen die Winkel PAQ und QAR, und ihre Vereinigung gibt den Winkel PAR. Es ist also

$$PAQ + QAR = PAR.$$

Die addirten Winkel PAQ, QAR haben den Schenkel AQ gemein; er ist der Endschenkel des ersten, der Anfangsschenkel des zweiten Winkels, und man findet leicht den allgemeinen Satz:

Die Addition zweier Winkel, welche eine gemeinschaftliche Spitze und einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, der der Endschenkel des ersten, der Anfangsschenkel des zweiten ist, gibt als Summe einen Winkel, der dieselbe Spitze und den Anfangsschenkel jenes ersten

Winkels zum Anfangs-, den Endschenkel des zweiten zum Endschenkel hat.

Dieser Satz ist ganz das für Winkel, was der §. 14. II. aufgestellte für Linien ist. Es ergibt sich auch sehr leicht:

$$PAQ + QAR + RAS + SAT = PAT.$$

III. Der Winkel BAC sey $= \varphi$, wo φ positiv und kleiner sey als 360°. Dann kann der Anfangsschenkel AB auch in die Lage AC gebracht werden, wenn er sich einmal links hin ganz herumdreht und dann noch jenen Winkel $= \varphi$ beschreibt, so entsteht der positive Winkel $\varphi + 360^\circ$. Dreht sich AB zweimal links herum, und dann noch in die Lage AC, so beschreibt er den Winkel $\varphi + 2 \,.\, 360^\circ$ u. s. w. Dreht sich dagegen AB rechts herum, bis er in die Lage AC kommt, so beschreibt er einen Winkel, der, als positiv betrachtet, den Winkel φ zu 360° ergänzt, und also $= 360^\circ - \varphi$ wäre; aber da er negativ ist, so ist er $= \varphi - 360^\circ$. Hätte sich der Schenkel AB erst einmal nach der rechten Seite hin ganz herum gedreht, und dann in die Lage AC, so hätte er den Winkel $\varphi - 2 \,.\, 360^\circ$ beschrieben, u. s. w.

Auf diese Weise ergibt sich, daß das Winkelconstruct BAC, wenn man immer AB als Anfangsschenkel betrachtet, durch folgende Winkelgrößen bestimmt werden kann:

$$\varphi$$
$$\varphi + 360^0$$
$$\varphi + 2 \,.\, 360^0$$
u. s. w.
$$\varphi - 360^0$$
$$\varphi - 2 \,.\, 360^0$$
u. s. w.

allgemein also durch $\pm n \,.\, 360^0 + \varphi$, wo n jede ganze Zahl bedeuten kann.

Man kann aber auch, um die Größe jenes Winkels aufzufassen, AC als Anfangsschenkel ansehen. Ist dann $BAC = \varphi$, so ist der Winkel CAB, der entsteht, indem sich AC rechts hin dreht, negativ, $= - \varphi$. Ferner, ist $BAC = \varphi + 360^0$, so ist CAB auch $= - (\varphi + 360^0)$; ist $BAC = \varphi - 360^0$, so ist CAB auch $= 360^0 - \varphi$, u. s. w. Allgemein, ist $BAC = \pm n \,.\, 360^0 + \varphi$, so ist $CAB = \pm n \,.\, 360^0 - \varphi$. Jenes Winkelconstruct wird also hier bestimmt durch die Winkel:

$$- \varphi$$
$$- 360^0 - \varphi$$
$$- 2 \,.\, 360^0 - \varphi$$
u. s. w.
$$360^0 - \varphi$$
$$2 \,.\, 360^0 - \varphi$$
u. s. w.

allgemein durch $\pm n \,.\, 360^0 - \varphi$.

Alle Ausdrücke für die Größe jenes Winkels, wenn man sich sowol AB wie AC als Anfangs-

schenkel zu betrachten erlaubt, und sowol eine Drehung links hin als rechts hin gelten läßt, sind also vereinigt in dem Ausdrucke:

$$\pm n \,.\, 360^0 \pm \varphi.$$

§. 17.

Additionsgegensatz nicht gerader Linien.

Wie in einer geraden Linie, eben so läßt sich ein Punct auch in jeder krummen oder gebrochnen Linie nach zwei verschiedenen Richtungen bewegen. Auch bei solchen Linien kann daher vom Additionsgegensatze gewisser Stücke derselben die Rede seyn.

In ernsthaften Untersuchungen kann ein solcher Gegensatz von Linien besonders dann vorkommen, wenn man es mit der in sich selbst zurücklaufenden Gränzlinie einer geradlinigen oder krummlinigen Figur zu thun hat. Liegen in einer solchen Gränzlinie zwei Puncte A und B, so hat das Stück der Gränzlinie, das zwischen A und B liegt, entweder A zum Anfangspuncte, B zum Endpuncte, oder umgekehrt. Man kann ferner den Punct A sowol nach der einen als nach der andern Seite hin bewegen, um ihn in B zu versetzen. Man kann endlich A auch in die Stelle von B versetzen, wenn man ihn erst sich ein oder mehrere Male durch den ganzen Umfang bewegen läßt und dann noch weiter bis in B. Kurz es lassen sich hier Sätze aufstellen, die

den eben vorher in §. 16. III. für die verschiedenen Arten, einen Winkel anzugeben, aufgestellten Sätzen ganz ähnlich sind. Der ganze Umfang der Figur tritt dabei an die Stelle des Winkels von 360°. Am wichtigsten ist diese Betrachtung beim Kreise, worin man also positive und negative Bogen hat.

§. 18.

Additionsgegensatz der Abscissen und der Ordinaten bei der Bestimmung eines Constructs durch Coordinaten.

I. Was in der Euthynomie die Bestimmung eines Constructs durch Hinzuthun eines Beziehungspunctes ist (§. 15. III.), das ist in der Epipedonomie die Bestimmung eines Constructs durch Hinzuthun von zwei Coordinatenaxen.

[Fig. 5.] Will man nach dieser Methode ein epipedonomisches Construct, z. B. eins aus vier Puncten, a′, a″, a‴, a^{IV}, bestimmen, so thue man zwei unbegränzte gerade Linien hinzu, MN und PQ, die sich in einem Puncte A unter beliebigen Winkeln, am besten jedoch senkrecht, schneiden, ziehe aus a′ die Parallelen, a′m′ mit PQ, und a′n′ mit MN, und auf gleiche Weise

aus a'', a''', a^{IV}

die Parallelen $\begin{cases} a''m'', & a'''m''', & a^{IV}m^{IV}, \\ a''n'', & a'''n''', & a^{IV}n^{IV}. \end{cases}$

so entstehet auf MN das euthynomische Construct $m'm''m'''m^{IV}$ und auf PQ das Construct $n'n''n'''n^{IV}$. Bestimmt man diese euthynomischen Constructe, so ist auch das Construct $a'a''a'''a^{IV}$ bestimmt. Man nimmt daher A zum gemeinschaftlichen Anfangspuncte aller Linien in MN und in PQ, und nennt

Am', Am'', Am''', Am^{IV}
die Abscissen von a', a'', a''', a^{IV}.
dagegen An', An'', An''', An^{IV}
die Ordinaten von a', a'', a''', a^{IV}.

Die Linien Am' und An' heißen mit gemeinschaftlichem Namen die Coordinaten von a'; MN heißt die Abscissenaxe, PQ die Ordinatenaxe, beide haben den gemeinschaftlichen Namen der Coordinatenaxen; A ist der Anfangspunct der Coordinaten.

In der Figur gelten nun die Abscissen Am', Am'' für positiv, Am''', Am^{IV} für negativ; die Ordinaten An', An''' für positiv, An'', An^{IV} für negativ.

Daher ist $< QAN$ der Winkel der positiven Coordinaten, $< PAM$ der Winkel der negativen Coordinaten, $< QAM$ der Winkel der negativen Abscissen und der positiven Ordinaten, $< PAN$

der Winkel der positiven Abscissen und negativen Ordinaten.

Man pflegt sonst die Linien $a'm'$, $a''m''$, u. s. w. die Ordinaten zu nennen, aber weit besser ist es, wie die Abscissen auf der Linie MN, so die Ordinaten nach obiger Methode auf PQ darzustellen. Bei dieser Methode erhellt auch deutlicher der Additionsgegensatz der Ordinaten von a' und a'' u. s. w.

Uebrigens ist klar, daß hiebei die negativen Abscissen nur den positiven Abscissen entgegengesetzt sind, daß man nicht sagen kann, Am''' sey der Ordinate An' entgegengesetzt u. s. w.

II. [Fig. 6.] Man habe eine Curve, welche die Abscissenaxe in einem Puncte B berühre, so daß von der Curve gar nichts auf der untern Seite von MN liege, so werden alle zur Curve gehörenden Ordinaten positiv seyn. Nimmt man irgend einen Punct B' in der Curve, so ist also seine Ordinate $B'C'$ positiv; rückt B' auf B zu, so wird diese Ordinate kleiner, in B ist sie $= 0$, und über B hinaus bekommt sie wieder positive Werthe, z. B. $B''C''$. Auf diese Weise geht die Ordinate durch 0, bleibt aber dabei positiv, und so ist dieß ein geometrisches Beispiel für den oben zu Ende des §. 12 in Bezug auf die Arithmetik ausgesprochenen Satz: Eine Größe, welche durch 0

geht, geht dabei nicht nothwendig aus + in — oder aus — in + über. So ist also auch in der Geometrie der Durchgang einer Größe durch o kein gewisses Zeichen entgegengesetzter Zustände dieser Größen.

§. 19.

Additionsgegensatz bei Flächenräumen.

Auch bei Flächenräumen ist nicht selten der Additionsgegensatz anwendbar. Man muß aber bei einer jeden geometrischen Untersuchung, wobei positive und negative Flächenräume vorkommen können, darauf achten, daß die Formeln, wonach die Flächenräume berechnet werden, den Gegensatz der Flächenräume abhängig machen vom Gegensatze der Linien. Denn eben diese Abhängigkeit des Gegensatzes der Flächenräume vom Gegensatze der Linien muß entscheiden, welche Flächenräume man für positiv, welche für negativ ansehen muß.

Folgendes Beispiel wird dieses deutlich machen:

[Fig. 7.] Zwei unbegränzte gerade Linien, MN und PQ sollen sich bei A rechtwinklich schneiden. Man nehme darin die vier Puncte B′, B″, C′, C″, daß die vier Dreiecke entstehen: AB′C′, AB′C″, AB″C′, AB″C″. Dann ist

1) Das Dreieck $AB'C'$ positiv. Denn $\triangle AB'C' = \frac{AB' \cdot AC'}{2}$ und AB', AC' sind beide positiv.

2) Das Dreieck $AB'C''$ ist negativ. Denn $\triangle AB'C'' = \frac{AB' \cdot AC''}{2}$ und AB' ist positiv, AC'' aber negativ.

3) Das Dreieck $AB''C'$ ist negativ; denn $\triangle AB''C' = \frac{AB'' \cdot AC'}{2}$, und AB'' ist negativ, AC' aber positiv.

4) Das Dreieck $AB''C''$ ist positiv; denn $\triangle AB''C'' = \frac{AB'' \cdot AC''}{2}$, und AB'', AC'' sind beide negativ.

Dritter Abschnitt.

Gebrauch des Additionsgegensatzes gerader Linien bei Anwendung der Algebra in der Geometrie.

---

§. 20.

Anwendung des Additionsgegensatzes bei den Formeln des Pythagoräischen Lehrsatzes und einigen daraus abgeleiteten.

I. Sind die Zahlen für die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks in Bezug auf eine beliebige Einheit a, b, c, wo a die Hypotenuse, b und c die Katheten bedeuten: so ist die Grundformel des Pythagoräischen Lehrsatzes

1) $a^2 = b^2 + c^2$

und in dieser liegen die folgenden

2) $a = \sqrt{b^2 + c^2}$

3) $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ und $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Es fragt sich: wie sind diese Formeln anwendbar, und was geben sie, wenn eine oder beide gegebene Linien negativ sind? ist es auch möglich, für die gesuchte Linie durch diese Formeln eine negative Zahl zu bekommen?

Gleich bei der Formel 1) ist leicht zu sehen, daß es für dieselbe gleichgiltig seyn wird, ob man

die Zahlen a, b, c, alle als positiv, alle als negativ, oder theils positiv theils negativ annimmt. Denn das Quadrat einer negativen Zahl $\overline{n}$ ist ganz gleich dem Quadrate der positiven Zahl n. Die Formel kann also geradezu angewandt werden, wenn man auch für die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks negative Zahlen hat.

Berechnet man nach der Formel 2) die Hypotenuse, so sieht man leicht, daß, bloß arithmetisch betrachtet, a sowol als negativ wie als positiv angesehen werden kann, indem diese Linie durch eine Quadratwurzel ausgedrückt wird. Dieß könnte man so andeuten: $a = \pm\sqrt{b^2 + c^2}$. Allein es können in einer besondern geometrischen Untersuchung Gründe vorhanden seyn, den Werth von a entweder als positiv oder als negativ zu betrachten, und man kann es daher als einen günstigen Umstand beim Gebrauche dieser Formel betrachten, daß dieselbe das Eine wie das Andere erlaubt. Ganz auf ähnliche Weise verhält es sich mit den Formeln unter 3).

[Fig. 7.] Man habe zwei unbegränzte gerade Linien, MN und PQ, die sich rechtwinklig schneiden. Man nehme in der horizontalen einen Punct B, in der verticalen einen Punct C; die Linie AC heiße b, AB heiße c, und BC a. Dann ist $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Diese Formel gilt, C mag

über oder unter A liegen, und da man c sowol als positiv wie als negativ betrachten kann, so kann man B sowol rechts als links von A nehmen. Kurz die Formel ist auf alle die Dreiecke AB′C′, AB′C″, AB″C′, AB″C″ anwendbar.

Schon §. 18. I., wo von der Bestimmungsart der Constructe durch Coordinaten die Rede war, wurde gesagt, man könne nicht sagen, die negativen Abscissen seyen den positiven Ordinaten, oder die negativen Ordinaten den positiven Abscissen entgegengesetzt, sondern der Additionsgegensatz finde nur unter den Abscissen für sich und den Ordinaten für sich Statt. Ganz etwas Aehnliches läßt sich hier in Bezug auf die Linien der 7ten Figur sagen. Bezieht man z. B. die Formel $a = \sqrt{b^2 + c^2}$ auf das Dreieck AB′C″, worin AC″ negativ ist, so muß man auch b als negativ ansehen, aber nicht in Bezug auf das zugleich in jener Formel enthaltene positive c, sondern bloß in Bezug auf positive Werthe, welche die Zahl b bei Anwendung der Formel auf andre Dreiecke haben kann. So können also in einer Formel positive und negative Zahlen vorkommen, ohne daß man doch sagen kann, zwischen allen diesen negativen und positiven Zahlen finde geradezu Additionsgegensatz Statt; es kann vielmehr bei einigen Zahlen in einer, bei andern Zahlen in andrer Beziehung Additionsgegensatz Statt finden.

Wie hier, so wird immer, wenn eine gesuchte Linie in einer Formel durch eine Quadratwurzel ausgedrückt wird, zu berücksichtigen seyn, daß man diese Wurzel sowol mit + als mit — denken kann, und daß vielleicht durch Gründe, welche in der besondern Untersuchung liegen, für das eine oder das andre Zeichen zu entscheiden ist. Meistens wird gar keine Rücksicht möglich seyn, worin bei der gefundenen Größe Additionsgegensatz Statt finden könnte, und dann kann man die durch die Formel gefundene Zahl als eine bloß absolute Zahl ansehen, oder wenn man ihr ja ein bestimmtes Zeichen geben will, muß man sie mit + nehmen.

II. Ueber die Formel für die Abschnitte der Seiten eines Dreiecks, welche entstehen, wenn man die Höhen des Dreiecks zieht.

[Fig. 8.] Man habe ein Dreieck $A'A''A'''$. Seine Höhen seyen $A'P'$, $A''P''$, $A'''P'''$. Seine Seiten mögen heißen:

$$A''A''' = a'$$
$$A'A''' = a''$$
$$A'A'' = a'''.$$

Dann wird der Abschnitt $A'P''$ von der Grundlinie $A'A'''$ ausgedrückt durch die Formel

$$A'P'' = \frac{-a'^2 + a''^2 + a'''^2}{2a''}.$$

Diese Formel gibt für $A'P''$ einen positiven Werth, wenn $a'^2 < a''^2 + a'''^2$, und dieß ist der Fall, wenn $A''A'A'''$ ein spitzer Winkel ist. Ist $< A' = 90^0$ so ist $A'P'' = 0$; ist $< A$ stumpf, so ist $A'P''$ negativ. So bezeichnet also ein positiver Werth, daß P'' von A' aus nach der Seite, wo A''' liegt, ein negativer, daß P'' nach der entgegengesetzten Seite liegt.

Drückt man die übrigen 5 Abschnitte durch Formeln aus, welche ganz eben so gebildet sind, wie die obige für $A'P''$ so findet sich:

$$A'''P'' = \frac{a'^2 + a''^2 - a'''^2}{2\,a''}$$

$$A'''P' = \frac{a'^2 + a''^2 - a'''^2}{2\,a'}; \quad A''P' = \frac{a'^2 - a''^2 + a'''^2}{2\,a'};$$

$$A''P''' = \frac{a'^2 - a''^2 + a'''^2}{2\,a'''}; \quad A'P''' = \frac{-a'^2 + a''^2 + a'''^2}{2\,a'''}.$$

Ist das Dreieck $A'A''A'''$ spitzwinklig, so haben alle diese Ausdrücke positive Werthe. Ist aber ein Winkel stumpf, z. B. A''', so bekommen die daran liegenden Abschnitte $A'''P''$ und $A'''P'$ negative Werthe.

Untersucht man nun, ob diese Zeichen der Werthe, welche jene Formeln geben, sich in der Lage der Linien, welche sie ausdrücken, gehörig aussprechen: so sieht man leicht, daß, wenn man allen jenen Abschnitten die Puncte A', A'', A''' zu Anfangspuncten, P', P'', P''' zu Endpuncten geben wollte, dieß gegen die bisher übliche Methode

verstoßen würde, indem nach derselben im spitzwinkligen Dreiecke $A'A''A'''$ der Abschnitt $A'''P''$ negativ seyn müßte, wenn $A'P''$ positiv war, da doch in diesem Falle die Formel für $A'''P''$ auch etwas Positives gibt.

Nun ist die Frage: soll man, um diesen Widerspruch gegen die bisherige Ansicht des Additionsgegensatzes gerader Linien zu entfernen, entweder den Vortheil, daß A', A'', A''' die Anfangspuncte aller Abschnitte seyn sollen, oder den, daß alle jene Formeln gleich gebildet sind, aufopfern? Wollte man das letztere thun, so könnte man in dem spitzwinkligen Dreiecke $A'A''A'''$ die Abschnitte $A'P''$, $A'''P'$, $A''P'''$ als positiv, $A'''P''$, $A''P'$, $A'P'''$ als negativ ansehen. Dann müßten die Formeln so aufgestellt werden:

$$A'P'' = \frac{-a'^2 + a''^2 + a'''^2}{2a''}; \quad A'''P'' = -\frac{a'^2 + a''^2 - a'''^2}{2a''}.$$

$$A'''P' = \frac{a'^2 + a''^2 - a'''^2}{2a'}; \quad A''P' = -\frac{a'^2 - a''^2 + a'''^2}{2a'}.$$

$$A''P''' = \frac{a'^2 - a''^2 + a'''^2}{2a'''}; \quad A'P''' = -\frac{-a'^2 + a''^2 + a'''^2}{2a'''}.$$

Weit bequemer und zweckmäßiger würde aber folgendes Verfahren seyn, wobei die Formeln alle ohne vorgesetztes — aufgestellt würden, aber nicht alle Abschnitte die Puncte A', A'', A''' zu Anfangspuncten bekommen würden.

Man denke einen Punct durch seine Bewegung

den Umfang des Dreiecks beschreibend. Er gehe von A' aus entweder nach A''' oder nach A'' hin. Es sey z. B. das Erstere der Fall, wo also der Punct aus A' in P'', dann der Reihe nach in A''', P', A'', P''' und endlich nach A' zurückkommt. Alle Linien, die dann nach einer Richtung liegen, welche dieser Punct dabei einmal befolgt, sollen positiv seyn. Man bezeichne also die sechs Abschnitte durch

$$A'P'',\ P''A''',\ A'''P',\ P'A'',\ A''P''',\ P'''A'$$

so müssen alle diese Abschnitte im spitzwinkligen Dreiecke $A'A''A'''$ durch positive Zahlen ausgedrückt werden, und so kann man sagen:

$$A'P'' = \frac{-a'^2 + a''^2 + a'''^2}{2a''};$$

$$P''A''' = \frac{a'^2 + a''^2 - a'''^2}{2a''};$$

$$A'''P' = \frac{a'^2 + a''^2 - a'''^2}{2a'};$$

$$P'A'' = \frac{a'^2 - a''^2 + a'''^2}{2a'};$$

$$A''P''' = \frac{a'^2 - a''^2 + a'''^2}{2a'''};$$

$$P'''A' = \frac{-a'^2 + a''^2 + a'''^2}{2a'''}.$$

Man bemerkt leicht eine durchgängige Regelmäßigkeit in den Bezeichnungen der Abschnitte durch

$A'P''$, $P''A'''$, $A'''P'$, $P'A''$, $A''P'''$, $P'''A'$. In allen diesen Bezeichnungen folgt nämlich auf einen Buchstaben, der bezeichnet ist

mit 1 Strich	ein Buchstabe,	2 Strichen
mit 2 Strichen	bezeichnet	3 Strichen
mit 3 Strichen	mit:	1 Strich.

Dieser Bemerkung zufolge kann man nun leicht beurtheilen, daß der Abschnitt zwischen A'' und P' nicht durch $A''P'$ sondern durch $P'A''$ bezeichnet werden muß, und erspart dabei die unmittelbare Betrachtung der Figur.

[Fig. 9.] Ist das Dreieck bei A''' stumpf, so erhält man für $P''A'''$, $A'''P'$ negative Werthe, und die Figur zeigt, daß sie dieselben dann auch wirklich haben müssen.

Als Beispiel kann das Dreieck dienen, worin $a' = 15$, $a'' = 7$, $a''' = 20$. Hier erhält man:

$A'P'' = 16$, $P''A''' = -9$.
$A'''P' = -4\frac{1}{5}$, $P'A'' = 19\frac{1}{5}$.
$A''P''' = 14\frac{2}{5}$, $P'''A' = 5\frac{3}{5}$.

III. Bekannt sind die Formeln für den Flächenraum und die Höhen eines Dreiecks aus seinen Seiten.

Heißen die Seiten $A''A''' = a'$,
$A'A''' = a''$,
$A'A'' = a'''$;
die Höhen $A'P' = b'$,
$A''P'' = b''$,
$A'''P''' = b'''$;
der Flächenraum S,
so ist

$$S = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a'+a''+a''')\,(a'+a''-a''')\,(a'-a''+a''')\,(-a'+a''+a''')},$$

oder, nennt man der Umfang des Dreiecks

$$a' + a'' + a''' = P$$

so ist $S = \sqrt{\tfrac{1}{2}P \,.\, (\tfrac{1}{2}P - a')\,(\tfrac{1}{2}P - a'') \,.\, (\tfrac{1}{2}P - a''')}$.

Die Höhen erhält man nach den Formeln:

$$b' = \frac{2S}{a'},$$

$$b'' = \frac{2S}{a''},$$

$$b''' = \frac{2S}{a'''}.$$

oder

$$b' = \frac{1}{2a'} \,.\, \sqrt{(a'+a''+a''').(a'+a''-a''')\,(a'-a''+a''')(-a'+a''+a''')}.$$

$$= \frac{2}{a'} \,.\, \sqrt{\tfrac{1}{2}P \,.\, (\tfrac{1}{2}P - a').(\tfrac{1}{2}P - a'').(\tfrac{1}{2}P - a''')}.$$

u. s. w.

In allen diesen Formeln kann man die Zahlen a', a'', a''' ansehen, als gäben sie bloß die absoluten Werthe der Seiten und seyen also positive Zahlen. Auch die Zahlen, welche man in

diesen Formeln durch die Wurzelausziehung erhält, kann man als bloß absolute Werthe der gesuchten Größen betrachten, man kann sie immer als positiv ansehen, obgleich die Formeln erlaubten, sie auch negativ zu nehmen.

Es kann jedoch gefragt werden, ob doch jene Formeln nichts Ungereimtes geben, wenn man nicht alle Seiten als positiv ansehen will. Hier findet sich, daß diese Formeln einerlei geben, man mag die Zahlen für eine oder für mehrere Seiten als positiv oder als negativ betrachten. Um dieses zu zeigen, ist es nur nöthig, die Formel für den Flächenraum zu untersuchen, und um dieses bequem zu thun, bezeichne man die Aggregate

$a' + a'' + a'''$ durch A

$-a' + a'' + a'''$ durch A'

$a' - a'' + a'''$ durch A''

$a' + a'' - a'''$ durch A'''

dann ist $S = \frac{1}{4} \sqrt{A \,.\, A' \,.\, A'' \,.\, A'''}$

Nun ergibt sich:

1) Es schadet nichts, wenn man alle drei Seiten durch negative Zahlen ausgedrückt hat.

Denn es seyen diese negativen Zahlen folgende

$\alpha' = -a'$

$\alpha'' = -a''$

$\alpha''' = -a'''$

wo a', a'', a''' die jenen negativen Zahlen entgegengesetzten positiven sind. Soll die obige Formel

für den Flächenraum richtig seyn, so muß, wenn man nennt

$$\alpha' + \alpha'' + \alpha''' = B$$
$$-\alpha' + \alpha'' + \alpha''' = B'$$
$$\alpha' - \alpha'' + \alpha''' = B''$$
$$\alpha' + \alpha'' - \alpha''' = B'''$$

$S = \frac{1}{4}\sqrt{B\,.\,B'\,.\,B''\,.\,B'''}$ seyn.

Nun aber ist

$$B\ \ = -a' - a'' - a''' = -A$$
$$B'\ = +a' - a'' - a''' = -A'$$
$$B'' = -a' + a'' - a''' = -A''$$
$$B''' = -a' - a'' + a''' = -A'''$$

d. h. die Werthe B, B', B'', B''' sind alle negativ und den positiven A, A', A'', A''' entgegengesetzt, sonst an Werthe gleich. Nun ist aber ein jedes Product aus 4 negativen Factoren positiv, also auch

$$B.B'.B''.B''' = A.A'.A''.A'''$$

und $\sqrt{B.B'.B''.B'''} = \sqrt{A.A'.A''.A'''}$

d. h. die Formel für den Flächenraum gibt einerlei, man mag die Zahlen für die Seiten als positiv oder als negativ ansehen

2) Es schadet nichts, wenn man eine der drei Seiten als negativ und durch eine negative Zahl gegeben ansieht.

Es seyen z. B. die Zahlen α', α'' positiv, aber α''' negativ und

$$\alpha' = a'$$
$$\alpha'' = a''$$
$$\alpha''' = -a'''$$

so daß die Zahlen a', a'', a''' alle positiv sind. Dann sind die Ausdrücke

$$B = \alpha' + \alpha'' + \alpha''' = a' + a'' - a''' = A'''$$
$$B' = -\alpha' + \alpha'' + \alpha''' = -a' + a'' - \alpha''' = -A''$$
$$B'' = \alpha' - \alpha'' + \alpha''' = \alpha' - \alpha'' - \alpha''' = -A'$$
$$B''' = \alpha' + \alpha'' - \alpha''' = a' + a'' + a''' = A.$$

und daher ist $B . B' . B'' . B''' = A . A' . A'' . A'''$.

also auch $\sqrt{B . B' . B'' . B'''} = \sqrt{A . A' . A'' . A'''}$

3) Die Formel ist auch anwendbar, wenn zwei Seiten durch negative Zahlen ausgedrückt sind.

Es seyen die Zahlen α'', α''' negativ und

$$\alpha' = a'$$
$$\alpha'' = -a''$$
$$\alpha''' = -a'''$$

dann ist

$$B = \alpha' + \alpha'' + \alpha''' = a' - a'' - a''' = -A'$$
$$B' = -\alpha' + \alpha'' + \alpha''' = -a' - a'' - a''' = -A$$
$$B'' = \alpha' - \alpha'' + \alpha''' = a' + a'' - a''' = A'''$$
$$B''' = \alpha' + \alpha'' - \alpha''' = a' - a'' + a''' = A.$$

folglich $B . B' . B'' . B''' = A . A' . A'' . A'''$

und $\sqrt{B . B' . B'' . B'''} = \sqrt{A . A' . A'' . A'''}$

Weit leichter hätte sich indessen alles dieses beweisen lassen, wenn man statt der Formel

$$S = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a'+a''+a''')(a'+a''-a''')(a'-a''+a''')(-a'+a''+a''')}$$

die damit identische geschrieben hätte:

$$S = \tfrac{1}{4}\sqrt{2a'^2 a''^2 + 2a'^2 a''^2 + 2a''^2 a'''^2 - a'^4 - a''^4 - a'''^4}$$

Denn in dieser letzten Formel kommen die Zahlen a', a'', a''' nur auf Potenzen mit geradem Exponenten vor. Es kann daher keine Aenderung im Werthe dieser Potenzen und in der Formel überhaupt verursachen, wenn man eine, zwei, oder alle drei von jenen Zahlen als negativ ansieht.

Noch läßt sich bemerken, daß die Formel für S etwas Unmögliches gibt, wenn eine der Zahlen a', a'', a''' größer ist als die beiden andern zusammen, diese Zahlen alle als positiv gedacht. Sind sie nämlich alle positiv und z. B. $a' > a'' + a'''$, so wird $A' = - a' + a'' + a'''$ negativ, die übrigen Aggregate A, A'', A''' bleiben positiv, das Product $A \,.\, A' \,.\, A'' \,.\, A'''$ ist also eine negative Zahl, und die Wurzel daraus unmöglich. Es ist auch sehr leicht einzusehen, warum dieß so seyn muß. Ist $a' > a'' + a'''$, so heißt dieß, die durch a' ausgedrückte Seite sey größer, als die beiden andern zusammengenommen; in diesem Falle ist aber bekanntlich kein Dreieck aus jenen Linien als Seiten möglich, und also auch der Flächenraum, die Höhen desselben, so wie alles andre, was von diesem Dreieck abhängig gedacht wird, unmöglich.

Die Bemerkung, daß diese Formeln giltig sind, mit welchen Zeichen man auch die Zahlen a', a'', a''' nehmen mag, und daß man die Werthe, welche sie für den Flächenraum oder für die Höhen

des Dreiecks geben, weil sie durch Ausziehung der Quadratwurzel gefunden sind, sowol mit + als mit — nehmen darf, daß man sie aber, wenn man keinen besondern Grund hat, sie mit — zu nehmen, mit + nehmen muß, ist ganz einerlei mit der in I. in Bezug auf die Formeln des Pythagoräischen Lehrsatzes angestellten Betrachtung. Eben dasselbe findet auch bei vielen andern Aufgaben Statt, in deren Auflösung eine Ausziehung einer Quadratwurzel gefordert wird. So z. B. bei der Formel für den Radius des um das Dreieck beschriebenen Kreises:

$$R = \frac{a' a'' a'''}{\sqrt{2a'^2 a''^2 + 2a'^2 a'''^2 + a''^2 a'''^2 - a'^4 - a''^4 - a'''^4}}$$

Diese Formel erwähnt in dieser Hinsicht Carnot in der Geometrie der Stellung, Theil I. Seite 93.

Auch bei den Formeln, wodurch man aus den Höhen eines Dreiecks seine Seiten findet, leidet diese Bemerkung ihre Anwendung.

Heißen nämlich die Höhen b', b'', b''', so findet man die Seiten a', a'', a''' vermittelst folgender Formeln *)

---

*) Ueber die Ableitung dieser Formeln siehe den Anhang II.

Man berechne zuerst $b'b'' + b'b''' + b''b''' = L$

dann $\sqrt{\tfrac{1}{2}L . (\tfrac{1}{2}L - b'b'') . (\tfrac{1}{2}L - b'b''') . (\tfrac{1}{2}L - b''b''')}$
$= M$

endlich $\frac{b'b''b'''}{2M} = N$

so ist

$$a' = \frac{b'b''^2 b'''^2}{2M} \text{ oder } = N . b''b'''$$

$$a'' = \frac{b'^2 b'' b'''^2}{2M} = N . b'b'''$$

$$a''' = \frac{b'^2 b''^2 b'''}{2M} = N . b'b''.$$

§. 21.

Es mag nun die Anwendung des Additionsgegensatzes bei der algebraischen Auflösung verschiedener geometrischer Aufgaben beispielsweise gezeigt werden, und zwar solcher Aufgaben, wobei die gesuchten Größen gerade Linien sind.

Man kann schon im voraus schließen, daß hier der Additionsgegensatz sowol bei den im Construct schon gegebenen Größen, als auch bei den gesuchten Linien wird Statt finden können. Und wie man überhaupt bei algebraischen Rechnungen, um die Anwendbarkeit des Additionsgegensatzes in den gefundenen Formeln zu beurtheilen, die Anwendung desselben in den zu Grunde liegenden Ansatzgleichungen prüfen muß, eben so

wird dieß auch in solchen geometrischen Aufgaben nöthig seyn.

Aeußerst oft erhält man bei der Auflösung einer geometrischen Aufgabe durch die Algebra zuletzt eine Formel, welche die Ausziehung einer Quadratwurzel fordert. Ist das, was unter dem Wurzelzeichen steht, positiv, so ist diese Wurzelausziehung möglich, und man kann die Wurzel sowol mit + als mit — nehmen, und in sofern gibt eine solche Formel zwei verschiedene Werthe für die gesuchte Größe; ja manche Formeln geben noch mehr als zwei Werthe. In allen solchen Fällen ist es äußerst wichtig, genau zu überlegen, ob auch alle diese Wurzeln wirkliche Auflösungen der Aufgabe sind, und, wenn dieß nicht der Fall ist, muß angegeben werden, welche von jenen Wurzeln zur Auflösung gebraucht werden können, welche verworfen werden müssen. Diese Bemerkung gilt eigentlich nicht bloß bei geometrischen Aufgaben, sondern überhaupt bei allen solchen Aufgaben, welche zu Gleichungen höherer Grade führen.

§. 22.

Beispiel I.

[Fig. 10.] Es sey gegeben die gerade Linie AB und senkrecht darauf die Linie BC, man soll in der Richtung von

AB einen Punct P finden, daß AP = 2.PC sey.

Man sieht leicht ein, daß diese Aufgabe zuweilen zwei Auflösungen haben kann, und daß der Punct P in manchen Fällen so gut links als rechts von B liegen kann.

Es heiße AB = a, BC = b, und gesucht werde BP = x.

Die Linie PC ist $= \sqrt{(BC^2 + BP^2)} = \sqrt{(b^2 + x^2)}$.

Dieß gilt, P mag links oder rechts von B liegen, x mag positiv oder negativ seyn. (§. 20. I.)

AP ist = AB + BP = a + x. Dieß gilt ebenfalls, x mag positiv oder negativ seyn. (§ 14. II.)

Nun soll AP = 2PC seyn, also

$$a + x = 2 . \sqrt{(b^2 + x^2)}$$

Diese Formel ist nach dem Gesagten giltig, x mag negativ oder positiv seyn. Man kann hieraus schließen, daß ein negatives x, welches die Aufgabe geben möchte, eine wirklich brauchbare Auflösung geben, nämlich einen Punct B bestimmen wird, der links von B nach A zu liegt.

Aus $a + x = 2\sqrt{(b^2 + x^2)}$ erhält man die quadratische Gleichung

$$3x^2 - 2ax = a^2 - 4b^2$$

und hieraus die Auflösung

$$x = \tfrac{1}{3}a \pm \tfrac{2}{3} . \sqrt{(a^2 - 3b^2)}$$

Bayerische Staatsbibliothek München

Diese Formel zeigt

1) Wenn $b > a.\sqrt{\frac{1}{3}}$, so ist x unmöglich.

2) Wenn $b = a.\sqrt{\frac{1}{3}}$, hat x nur einen Werth, $\frac{1}{3}a$.

3) Wenn $b < a.\sqrt{\frac{1}{3}}$, hat x zwei verschiedene Werthe. In diesem Falle kann, der eine Werth, nämlich $\frac{1}{3}a - \frac{2}{3}.\sqrt{(a^2\ 3b^2)}$, auch negativ seyn. Er ist es

wenn $2.\sqrt{(a^2 - 3b^2)} > a$ ist,
oder wenn $a > 2b$.

Folgendermaßen läßt sich die Aufgabe leicht durch Construction auflösen:

Man ziehe die Linie AC und verlängere sie über C; nehme darin $CD = \frac{1}{3}CA$ und in ihrer Verlängerung $CE = AC$; man halbire DE in F und beschreibe aus F mit dem Radius FD einen Kreis, so wird derselbe die Linie AB in zwei Puncten schneiden, wenn $b < a\sqrt{\frac{1}{3}}$, und diese Puncte haben die verlangte Eigenschaft, in der Figur heißen sie P′, P″; ist aber $b = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, so wird der Kreis die Linie AB bloß in ihrer Verlängerung berühren und dadurch nur einen Punct P geben; ist endlich $b > a\sqrt{\frac{1}{3}}$, so wird er die Linie AB nicht einmal berühren, es wird sich gar kein Punct P finden.

Diese geometrische Auflösung gründet sich darauf, daß der beschriebene Kreis der geometrische Ort ist für alle Puncte p, die über der Seite AC

als Grundlinie ein Dreieck ACp geben, worin Ap = 2 . Cp.

In der algebraischen Auflösung wurde gleich bei der Ansatzgleichung überlegt, daß darin x sowol negativ als positiv seyn und zwei Puncte bestimmen konnte. Daher war gar kein Zweifel über die Giltigkeit der beiden Werthe, welche x in der Auflösung bekam, möglich.

§. 23.

Beispiel II.

[Fig. 11.] In einem rechtwinkligen Dreiecke ABC, worin < A der rechte, sey aus A auf die Hypothenuse BC das Perpendikel AD gefällt; gegeben sey die Kathete AB und der Abschnitt der Hypotenuse DC, gesucht werde der andere Abschnitt BD.

Man nenne die Zahlen für AB = a
für DC = b
für BD = x

Hier müssen die Linien BD und DC von gleichen Zeichen seyn, also muß auch die Zahl x mit b im Zeichen übereinstimmen. Da in der Aufgabe gar kein Grund vorhanden ist, eine von den beiden Zahlen a, b als negativ anzusehen, so wird man am besten alle drei Zahlen a, b, x als positiv betrachten. Und hieraus kann man schon im vor=

aus schließen, daß die Auflösung für x einen positiven Werth geben muß, und daß, wenn sie mehrere Werthe für x geben sollte, man nur einen positiven als wirklich brauchbar zu nehmen hat.

Nun hat man bekanntlich, weil $\triangle ABD \sim CBA$

$$BD : AB = AB : BC,$$

es ist aber $BC = BD + DC = x + b$,

also $x : a = a : x + b$

Aus dieser Proportion erhält man die quadratische Gleichung

$$x^2 + bx = a^2$$

und hieraus die Auflösung

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(4a^2 + b^2)}}{2}.$$

x hat hier also, in sofern es bloß eine Auflösung von der Gleichung $x^2 + bx = a^2$ gibt, zwei Werthe, die besondre Betrachtung der geometrischen Aufgabe muß aber entscheiden, ob man beide, oder nur eine, und dann, welche Wurzel man als richtige Auflösung ansehen kann. Nur wurde schon oben gefunden, man dürfe, wenigstens wenn b positiv sey, für x ebenfalls bloß einen positiven Werth nehmen; dieses ist hinreichend, um das Zeichen — vor dem Wurzelausdruck wegzulassen, und bloß den positiven Werth

$$x = \frac{-b + \sqrt{(4a^2 + b^2)}}{2}$$

als richtige Auflösung anzusehen. Nur wenn man b als negativ ansähe, müßte man setzen $x = \frac{-b - \sqrt{(4a^2 + b^2)}}{2}$, wo auch x negativ wäre.

Wenn man in der Aufgabe nicht nach der Linie BD, sondern nach DB gefragt hätte, welche Linie als negativ gelten muß, wenn DC positiv seyn soll, so hätte man sagen müssen

$$BC = BD + DC = DC - DB = b - x$$

und hieraus wäre die Proportion

$$-x : a = a : b - x$$

erfolgt; denn da hierin die drei letzten Glieder alle positiv wären, so müßte dieß auch das erste seyn; man könnte also nicht das negative x, sondern nur das positive $-x$ zum ersten Gliede nehmen. Diese Proportion gibt aber die Gleichung

$$x^2 - bx = a^2$$

und hieraus die Auflösung

$$x = \frac{b \pm \sqrt{(4a^2 + b^2)}}{2}.$$

Da aber x negativ seyn soll, so müßte man bloß als wahre Auflösung annehmen.

$$x = \frac{b - \sqrt{(4a^2 + b^2)}}{2}.$$

Natürlicher ist freilich die erstere Auflösung, wo x als positiv betrachtet wurde.

Dieß Beispiel ist aber besonders deswegen

wichtig, weil es zeigt, daß man von mehreren Werthen, die man in der Auflösung für die unbekannte Größe erhält, zuweilen, der Betrachtung der Aufgabe und der Ansatzgleichung gemäß, nur einen oder einige nehmen, die andern wegwerfen muß. Auch das folgende Beispiel dient zum Belege hiefür.

§. 24.

Beispiel III.

[Fig. 12.] Von einem Puncte K, der außerhalb eines gegebenen Kreises liegt, soll man eine Linie Kmm′ ziehen, so daß der durch den Kreis abgeschnittene Theil mm′ dieser Linie einer gegebenen geraden Linie, sie heiße c, gleich sey. Man sucht $Km = x$.

Der Kreis und die Lage des Punctes K gegen denselben mögen dadurch bestimmt seyn, daß man aus K eine Linie KAB durch den Mittelpunct des Kreises zieht, und angibt

$$KA = a$$
$$KB = b.$$

Man hat nun nach §. 14. II.

$$Km' = Km + mm' = x + c.$$

Aber nach den bekannten Eigenschaften des Kreises ist, wenn man unter KA, KB, Km,

Km', nicht eigentlich die Linie, sondern die Zahlen versteht, welche dieselben ausdrücken,

$$KA \,.\, KB = Km \,.\, Km'$$

$$\text{oder } a \,.\, b = x \,.\, (x + c)$$

Bei weitem am natürlichsten ist es, die Zahlen a, b beide positiv zu nehmen, dann kann man entweder

1) was wieder am natürlichsten ist, die Zahlen x und $Km' = x + c$ beide als positiv betrachten, dann muß auch c für positiv gelten.

2) oder man könnte auch sowol x als Km' und daher auch c als negativ betrachten, dann würden beide Gleichungen $Km' = x + c$, und $a \,.\, b = x \,.\, (x + c)$ auch ihre Richtigkeit haben.

Die Betrachtung beider möglichen Fälle ergibt, daß c und x immer Zahlen von einerlei Zeichen seyn müssen. Nimmt man also c positiv, so darf man bei der Auflösung nur einen positiven Werth von x als richtig ansehen, nimmt man c negativ, nur einen negativen.

$$\text{Aus } ab = x \,.\, (x + c)$$

$$\text{kommt } x^2 + cx = ab$$

$$\text{und hieraus } x = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4ab}}{2}.$$

Ist c positiv, so darf man vor dem Wurzelzeichen nicht — nehmen; so ist hier

$$x = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4ab}}{2}$$

und da $\sqrt{c^2 + 4ab}$ größer ist als c, so gibt dieser Werth bestimmt etwas positives für x, wie es seyn muß.

Wollte man dagegen c als eine negative Zahl ansehen, so müßte man nehmen

$$x = \frac{-c - \sqrt{c^2 + 4ab}}{2}.$$

Auch dieses Beispiel zeigt, wie das vorhergehende, daß nicht immer jeder Werth, den man bei der algebraischen Auflösung einer geometrischen Aufgabe erhält, als richtige Auflösung angesehen werden darf, daß aber gleich bei der Entwickelung der Ansatzgleichung die genaue Betrachtung der Aufgabe zeigen kann, welchen der Auflösungswerthe man als richtig herausheben muß.

Carnot (Geometrie der Stellung, Theil I. S. 8.) bedient sich dieses Beispiels, um die Unrichtigkeit der Regel zu zeigen, daß negative Wurzeln in einer Richtung genommen werden müßten, welche der Richtung entgegengesetzt sey, worin die positiven genommen würden. Daß diese Regel zuweilen anwendbar ist, zeigt das Beispiel I. in §. 22. Wer behaupten wollte, daß diese Regel immer anwendbar sey, behauptete freilich eine Unrichtigkeit. Dieß ist aber kein Grund, den ge-

wöhnlichen Begriff negativer Größen falsch oder dunkel zu nennen, welchen Vorwurf Carnot demselben macht.

§. 25.

Beispiel IV.

[Fig. 13.] Das bei B rechtwinklige Dreieck ABC sey durch die Hypotenuse CA = b, die Kathete CB = a gegeben, wobei unter a und b positive Zahlen gedacht werden. Nimmt man in der Richtung von CB einen Punct d, zieht zu ihm die Linie Ad und fällt das Perpendikel dm: so entstehen die beiden rechtwinkligen Dreiecke Cdm und BAd. Wo muß d angenommen werden, daß unter diesen Dreiecken ein gegebenes Verhältniß Statt finde, daß Cdm : BAd = n sey?

Man vergleiche die Dreiecke Cdm und ABd beide mit ABC, so findet sich:

1) Das Dreieck Cdm ist dem ABC ähnlich und daher

$$\triangle\, Cdm : \triangle\, ABC = Cd^2 : CA^2 = x^2 : b^2$$

$$\text{oder } \triangle\, Cdm = \frac{x^2}{b^2} \,.\, ABC$$

Diese Formel gibt für △ Cdm immer einen

Werth, der im Zeichen mit ABC übereinstimmt, es mag nun x, d. h. Cd positiv oder negativ seyn. Man sehe das Dreieck ABC als positiv an, so gelten in der Figur nicht bloß die Dreiecke Cd′m′, Cd″m″, $C\delta'\mu'$ für positiv, sondern auch das Dreieck $C\delta''\mu''$. Man vergleiche hierüber §. 19.

Sieht man AB als gemeinschaftliche Grundlinie der beiden Dreiecke ABC und ABd an: so verhalten sich dieselben wie ihre Höhen, d. h. wie die Katheten CB, Bd.

$$\text{also } \triangle ABd = \frac{Bd}{CB} \cdot \triangle ABC$$

Hier ist $CB = a$,

$$Bd = BC + Cd = Cd - CB = x - a;$$

$$\text{folglich } \triangle ABd = \frac{x-a}{a} \cdot \triangle ABC.$$

Hier ist der Nenner a immer positiv, der Zähler $x - a = Bd$ ist aber positiv für die Puncte d′, d″, negativ für die Puncte δ', δ'', daher sind auch die Dreiecke ABd′, ABd″ positiv, $AB\delta'$, $AB\delta''$ aber negativ. Aus diesem ergibt sich:

$$\text{Die Zahlen } \left.\begin{array}{l}\triangle Cd'm' : ABd' \\ \triangle Cd''m'' : ABd''\end{array}\right\} \text{ sind positiv.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\triangle C\delta'\mu' : AB\delta' \\ \triangle C\delta''\mu'' : AB\delta'\end{array}\right\} \text{ sind negativ.}$$

Soll also Cdm : ABd = n seyn, so ist

diese Zahl für die Puncte d', d'' positiv, für die Puncte δ', δ'' negativ; und umgekehrt also, gibt man für n eine positive Zahl, so muß man bei der Auflösung Werthe von Cd', Cd'' finden, gibt man für n eine negative Zahl, so findet man Werthe von Cδ', Cδ''.

Nun ist aber

$$\triangle Cdm : \triangle ABC = \frac{x^2}{b^2} . \triangle ABC : \frac{x-a}{a} . \triangle ABC$$

$$= \frac{ax^2}{b^2 . (x-a)},$$

was sowol für δ', δ'' als für d', d'' gilt. Man hat also:

$$\frac{ax^2}{b^2 (x-a)} = n$$

oder $ax^2 = b^2nx - ab^2n$

Aus dieser quadratischen Gleichung erhält man

$$x = \frac{b^2n \pm b . \sqrt{b^2n^2 - 4a^2n}}{2a}.$$

Durch Betrachtung dieser Formel ergibt sich:

1) Setzt man hier, wo a und b positiv sind, n positiv, so ist

a) das unter dem Wurzelzeichen stehende $b^2n^2 - 4a^2n$ positiv, wenn

$$b^2n^2 > 4a^2n$$

oder wenn $n > \frac{4a^2}{b^2}$.

In diesem Falle hat x zwei mögliche und zwar positive Werthe, denn $b^2 n$ wird größer seyn, als $b \sqrt{b^2 n^2 - 4a^2 n}$. So werden hier also wirklich zwei Puncte wie d′, d″ bestimmt.

b) Das unter dem Wurzelzeichen stehende ist $= 0$, wenn $n = \frac{4a^2}{b^2}$.

Hier fallen die beiden Werthe von x in einer einzigen $x = \frac{b^2 n}{2a} = \frac{4a^2 b^2}{2ab^2} = 2a$ zusammen, und eben so die beiden Puncte d′, d″ in einen einzigen.

c) Das unter dem Wurzelzeichen stehende ist negativ, wenn $n < \frac{4a^2}{b^2}$.

In diesem Falle ist x unmöglich, und also sind auch keine Puncte d′, d″ möglich.

2) Setzt man n aber negativ, so ist x immer möglich, und zwar

der Werth $\frac{b^2 n + b \sqrt{b^2 n^2 - 4a^2 n}}{2a}$ positiv,

der Werth $\frac{b^2 n - b \sqrt{b^2 n^2 - 4a^2 n}}{2a}$ negativ.

Der erste positive Werth bestimmt den Punct δ′, der zweite negative den Punct δ″.

Exempel. Es sey $a = 4$, $b = 5$, $n = 3$, so ist

$$x = \frac{75 \pm 5\sqrt{33}}{8} = \begin{cases} 12{,}96535 = Cd''. \\ 5{,}78465 = Cd'. \end{cases}$$

Setzt man aber $n = -3$, so kommt

$$x = \frac{-75 \pm 5\sqrt{417}}{8} = \begin{cases} 3{,}38786 = C\delta' \\ -22{,}13786 = C\delta'' \end{cases}$$

In der Figur sind das Dreieck ABC und die Puncte d', d'', δ', aber nicht δ'' nach diesem Exempel gezeichnet.

§. 26.

Beispiel V.

[Fig. 14.] Ein Dreieck ABC ist gegeben, ein Rechteck mnpr zu construiren, das einen gegebenen Flächenraum s hat, und wovon zwei Eckpuncte, p und r, in der einen Seite AC, die beiden andern Eckpuncte m und n in den andern Seiten des gegebenen Dreiecks oder in deren Verlängerungen liegen.

Eine leichte Ueberlegung zeigt, daß es viererlei Rechtecke geben kann, welche der Aufgabe Genüge leisten, nämlich:

$m'\ n'\ p'\ r'$
$m''\ n''\ p''\ r''$
$\mu'\ \nu'\ \pi'\ \varrho'$
$\mu''\ \nu''\ \pi''\ \varrho''$

Doch ist auch leicht einzusehen, daß, wenn der für das gesuchte Rechteck gegebene Flächenraum s zu groß wäre, z. B. dem Flächenraum des Dreiecks ABC selbst gleich, die Rechtecke $m'n'p'r'$ und $m''n''p''r''$ beide unmöglich würden; daß dagegen die Rechtecke $\mu'\nu'\pi'\varrho'$ und $\mu''\nu''\pi''\varrho''$ immer möglich seyn werden, s sey so groß oder so klein, als es wolle. So wird also die Aufgabe bald vier bald nur zwei Auflösungen zulassen.

Man sehe Fd an als das unbekannte x. Um diese Linie zu erfahren, braucht man vom Dreieck ABC bloß die Grundlinie $AC = a$, und die Höhe $FB = b$ zu kennen.

Die Linien Fd', Fd'', $F\delta'$, $F\delta''$ sollen alle F zum Anfangspuncte haben und bloß $F\delta''$ soll für negativ gelten.

Man hat nun $dB = dF + FB = FB - Fd = b - x$. Dieser Werth von dB ist bloß für den Punct δ', als $\delta'B$, negativ.

Ferner ist, weil $\triangle ABC \sim mBn$

$$mn = \frac{dB \, . \, AC}{FB} = \frac{(b - x) \, . \, a}{b}.$$

Diese Formel gibt bloß für die Linie $\mu'\nu'$ etwas negatives; die Linien $m'n'$, $m''n''$, $\mu''\nu''$ sind positiv.

Nun ist endlich

$$\square\, mnpr = mn \,.\, Fd = \frac{(b - x)\,.\,a}{b}\,.\,x$$

Dieser Formel zufolge sind die Rechtecke $m'n'p'r'$ und $m''n''p''r''$ positiv; denn für sie ist sowol $mn = \frac{(b-x)\,.\,a}{b}$ als $Fd = x$ positiv. Dagegen $\mu'\nu'\pi'\varrho'$ und $\mu''\nu''\pi''\varrho''$ sind negativ; denn für das erste ist $mn = \mu'\nu'$ negativ, $F\delta'$ positiv, für das andere aber ist $mn = \mu''\nu''$ positiv, $F\delta''$ negativ.

Setzt man also

$$\square\, mnpr = \frac{(b - x)\,.\,a}{b}\,.\,x = s,$$

so muß hierin s bei den Rechtecken $m'n'p'r'$ und $m''n''p''r''$ positiv seyn, bei den Rechtecken $\mu'\nu'\pi'\varrho'$ und $\mu''\nu''\pi''\varrho''$ aber negativ.

Jene Gleichung gibt aber:

$$ax^2 - abx = - bs$$

$$x = \tfrac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{bs}{a}}$$

Setzt man hierin s positiv, so erhält man für x zwei Werthe, entweder zwei positive, oder zwei unmögliche. Dieß letztere ist der Fall, wenn $s > \frac{ab}{4}$, d. h. wenn s größer ist, als der halbe Flächenraum des Dreiecks ABC.

Setzt man s negativ, so gibt die Formel immer zwei mögliche Werthe für x, einen positiven für $F\delta'$, einen negativen für $F\delta''$. Also sind in diesem Falle die Rechtecke $\mu'\nu'\pi'\varrho'$ und $\mu''\nu''\pi''\varrho''$ auch nach der Formel immer möglich.

Immer ist $Fd' = d''B$ und $\delta''F = B\delta'$.

Die Absicht dieses Exempels, eben so wie die des vorigen, war, das zu bestätigen, was §. 19 über die Abhängigkeit des Gegensatzes der Flächenräume vom Gegensatze der Linien gesagt wurde.

§. 27.

Beispiel VI.

[Fig. 15.] Gegeben sey das rechtwinklige Dreieck ABC, dessen Seiten heißen $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Gesucht wird in der Richtung von BC ein Punct P, welcher mache, daß die Summe der Linien $BP + PA$ einer gegebenen Linie m gleich sey.

Man nenne $BP = x$; so soll

$$x + PA = m$$

seyn. Es ist aber $PA = \sqrt{AC^2 + CP^2}$

und $CP = CB + BP = BP - BC$
$= x - a$

also $PA = \sqrt{b^2 + (x - a)^2}$

und $x + \sqrt{b^2 + (x-a)^2} = m.$

Zur Richtigkeit dieser Ansatzgleichung ist erforderlich, daß man x, wenn es eine Linie wie BP′ ausdrückt, wo P rechts von B liegt, als positiv, daß man es aber als negativ betrachte, wenn es eine Linie wie BP″ ausdrückt, wo P links von B liegt. Denn nur unter dieser Voraussetzung ist wirklich CP = x — a. Man kann daher schließen, daß in der Auflösung ein positives x einen Punct P′, ein negatives aber einen Punct P″ bestimmen wird.

Jene Gleichung $x + \sqrt{b^2 + (x - a)^2} = m$

gibt $\sqrt{b^2 + (x - a)^2} = m - x$

$b^2 + x^2 - 2ax + a^2 = m^2 - 2mx + x^2$

$2(m - a)x = m^2 - a^2 - b^2$

endlich $x = \frac{m^2 - (a^2 + b^2)}{2(m - a)}$.

aber da $a^2 + b^2 = c^2$ so kann man kürzer sagen

$$x = \frac{m^2 - c^2}{2(m - a)}.$$

Man betrachte jetzt die Figur

1) Liegt P in B, so ist BP = x = o und m = AB = c, also positiv.

2) Liegt P rechts von B, wie in P′, so ist BP′ positiv, und die Summe BP′ + P′A positiv und größer als c; diese Summe wächst, je weiter P′ rets hin rückt.

3) Liegt P links von B, wie in P″, so wird

$BP'' = x$ negativ; da aber $P''A$ größer ist, als $P''B$, so ist diese Summe

$$BP'' + P''A = P''A - P''B$$

dennoch positiv. Uebrigens nimmt diese Summe immer mehr ab, je mehr P'' nach der linken Seite hin rückt. Denn je mehr dieß geschieht, desto mehr nähert sich $P''A$ dem Werthe $P''C$ und also jene Summe dem Werthe

$$B''C - P''B = BC = a.$$

So ist also m immer positiv und größer als a. Es liegt zwischen den Gränzen a und $+ \infty$.

Nun kann untersucht werden, in wiefern die Formel für x diesen Betrachtungen der Figur entspricht.

1) Setzt man $m = c$ so kommt richtig $x = 0$.

2) Setzt man m positiv, und größer als c, so erhält man für x etwas positives. Für $m = + \infty$ ist $x = + \infty$.

3) Setzt man m positiv, aber kleiner als c und größer als a, so erhält man für x etwas negatives. Nimmt man aber $m = a$, so kommt

$$x = \frac{a^2 - c^2}{2(a - a)} = \frac{a^2 - c^2}{0} = \pm \infty.$$

Hier ist auffallend, daß x nach der Formel sowol als $+ \infty$ wie als $- \infty$ angesehen werden kann, da doch die Betrachtung der Figur unmittelbar ergeben hat, daß für $x = - \infty$ $m = a$ seyn

würde, daß also $m = a$ auch nur $x = - \infty$ geben darf. Doch dieß ist nicht das einzige auffallende. Es muß auch sehr sonderbar scheinen, daß die Formel selbst reelle Werthe für x gibt, wenn man m kleiner als a, selbst wenn man es negativ setzt, da doch die Betrachtung obiger Aufgabe in der Figur zeigte, daß m nur Werthe haben dürfe, welche die Gränzen a und $+ \infty$ nicht überschreiten. Diese Räthsel lassen sich folgendermaßen befriedigend lösen:

Die oben gefundene Formel ist nicht nur eine Auflösung der oben aufgestellten Aufgabe, sondern zugleich die Auflösung der Aufgabe:

Den Punct P so zu bestimmen, daß die Differenz BP — PA einer gegebenen Linie μ gleich sey.

Diese Aufgabe aufzulösen, hätte man nämlich setzen müssen:

$$x - \sqrt{b^2 + (x - a)^2} = \mu$$

eine Gleichung, welche von der bei der ersten Aufgabe $x + \sqrt{b^2 + (x - a)^2} = m$ bloß dadurch sich unterscheidet, daß da vor dem Wurzelzeichen $+$ und statt μ m steht. Aus jetziger Gleichung kommt.

$$\sqrt{b^2 + (x^2 - a)^2} = x - \mu$$

$$b^2 + x^2 - 2ax + a^2 = x^2 - 2\mu x + \mu^2$$

Diese Gleichung kam bei der ersten Aufgabe ganz

eben so vor, nur daß statt μ stand m. Hier erhält man also

$$x = \frac{\mu^2 - c^2}{2(\mu - a)}$$

eine Auflösung, welche sich von der Auflösung der ersten Gleichung auch bloß dadurch unterscheidet, daß statt des dortigen m hier μ steht.

Die Betrachtung der Figur zeigt nun hier

1) liegt P in B, so ist BP = o, PA = c, also μ = BP — PA = o — c = — c, negativ.

2) Rückt P rechts hin vor B, so nimmt das negative μ ab, wird o, und endlich positiv; ist BP = + ∞, so ist PA = CP, also BP — PA = BP — CP = BC = a. Dieß ist der höchste Werth, den μ erreichen kann.

3) Liegt P links von B, so ist BP als BP'' negativ, also BP — PA = μ negativ, und zwar nähert sich dieser Werth desto mehr dem — ∞, je mehr sich BP dem — ∞ nähert.

Aus diesen einzelnen Fällen ergibt sich also, daß hier die Gränzen von μ sind + a und — ∞.

Auch die Formel muß hiemit stimmen.

1) Setzt man μ = — c, so kommt richtig x = o.

2) Gibt man μ einen Werth, der zwischen dem negativen — c und dem positiven a liegt, so wird in $x = \frac{\mu^2 - c^2}{2(\mu - a)}$ sowol Zähler als Nen-

ner negativ, der Nenner aber nicht $= 0$, daher bekommt x einen reellen positiven Werth. Für $\mu = a$ wird aber der Nenner $= 0$, daher $x = \pm \infty$. Hier ist wieder auffallend, daß man x nach der Formel sowol $+ \infty$ als $- \infty$ nehmen darf, da doch nach der Betrachtung der Figur x bloß $= + \infty$ seyn sollte. Man sieht aber, daß die Formel $\frac{\mu^2 - c^2}{2(\mu - a)}$ für die Werthe $\mu = a = m$ zusammenfällt mit der Formel $\frac{m^2 - c^2}{2(m - a)}$ man kann daher diese Formel betrachten, als gehöre der Werth $- \infty$, den sie bei $m = \mu = a$ gibt, eigentlich bloß für die erste Aufgabe, der Werth $+ \infty$, den sie bei derselben Annahme für x gibt, aber zur zweiten Aufgabe.

3) Setzt man μ negativ und größer als $- c$, d. h. $\mu < - c$, so wird in $\frac{\mu^2 - c^2}{2(\mu - a)}$ der Zähler positiv, der Nenner negativ, daher x negativ. Für $\mu = - \infty$ kommt $x = - \infty$.

Statt zu sagen:

die Formel $x = \frac{m^2 - c^2}{2(m - a)}$ gibt eine Auflösung der ersten Aufgabe, indem man dem m Werthe gibt, welche die Gränzen a und $+ x$ nicht überschreiten;

die Formel $x = \frac{\mu^2 - c^2}{2(\mu - a)}$ gibt eine Auflösung der zweiten Aufgabe, indem man dem μ bloß Werthe gibt, welche die Gränzen a und $-\infty$ nicht überschreiten;

kann man sagen:

die Formel $x = \frac{M^2 - c^2}{2(M - a)}$ ist sowol für die erste als für die zweite Aufgabe eine Auflösung; aber in sofern es eine Auflösung der ersten Aufgabe ist, darf man M nur Werthe geben, welche die Gränzen a und $+\infty$ nicht übersteigen; will man dadurch hingegen die zweite Aufgabe auflösen, so darf M keine Werthe bekommen, die nicht in den Gränzen a und $-\infty$ enthalten sind.

Da $M = a$ sowol für die erste als für die zweite Aufgabe ein Gränzwerth ist: so muß aus der Annahme $M = a$ sich sowol ein Gränzwerth von x in der ersten als in der zweiten Aufgabe ergeben. Nun macht $M = a$ $x = \pm\infty$, hievon gilt $+\infty$ als ein Gränzwerth von x in der zweiten Aufgabe, wie theils aus unmittelbarer Betrachtung der Figur, theils auch daraus sich ergibt, daß positive Werthe von M, die nur wenig kleiner sind, als a, einen Werth von x als Auflösung der zweiten Aufgabe geben, der positiv und desto größer ist, je mehr M sich dem a nähert. Auf ähnliche Weise findet sich, daß der aus $M = a$

entspringende Werth $x = -\infty$ als Auflösung der ersten Aufgabe angesehen werden muß.

Daß AP oder PA immer als positiv angesehen werden konnte, bedurfte keiner Erwähnung.

Dieß Beispiel sollte zeigen:

Eine Formel für die Auflösung einer Aufgabe kann zu weit, sie kann zugleich auch die Formel für die Auflösung einer andern verwandten Aufgabe seyn, so daß sie für die eine nur unter gewissen Umständen, z. B. bei gewissen Werthen einer bekannten Größe paßt, wo sie gerade für die andere Aufgabe ungiltig ist.

Der bloß algebraische Grund dieser auffallenden Erscheinung lag hier in der Form der Ansatzgleichungen

$$x + \sqrt{b^2 + (x - a)^2} = M$$

$$x - \sqrt{b^2 + (x - a)^2} = M$$

welche Ansatzgleichungen zu einerlei Auflösung führen.

Ganz dieselbe Bemerkung wird sich auch bei dem folgenden Beispiele machen lassen.

§. 14.

Beispiel VII.

[Fig. 16.] Von einem Dreiecke ist gegeben die Grundline b, die Höhe h, und die Summe der beiden andern Sei-

ten, AC + BC = m, man sucht, um das Dreieck vollkommen zu bestimmen, die Entfernung des Fußpunctes der Höhe, P vom Mittelpunct M in der Grundlinie, also MP = x.

Hier ist AP = AM + MP = $\frac{1}{2}$b + x oder indem man statt $\frac{1}{2}$b zur Abkürzung schreibt a,

$$AP = a + x$$

und $PB = PM + MB = MB - MP = a - x$

also $AC = \sqrt{AP^2 + PC^2} = \sqrt{(a+x)^2 + h^2}$

$BC = \sqrt{PB^2 + PC^2} = \sqrt{(a-x)^2 + h^2}$

Nun soll AC + BC = m seyn; also

$$\sqrt{(a+x)^2+h^2} + \sqrt{(a-x)^2+h^2} = m.$$

Diese Gleichung quadrirt, vereinfacht und dann transponirt, erhält man

$$2 \cdot \sqrt{(a^2+2ax+x^2+h^2).(a^2-2ax+x^2+h^2)} = m^2 - 2a^2 - 2h^2 - 2x^2$$

Wieder quadrirt und vereinfacht kommt

$$16a^2x^2 - 4m^2x^2 - 4m^2h^2 - 4m^2a^2 + m^4 = 0$$

oder $x^2 = \dfrac{4m^2h^2 + 4m^2a^2 - m^4}{16a^2 - 4m^2}$

$$= \frac{m^2 . (4a^2 + 4h^2 - m^2)}{4(4a^2 - m^2)}.$$

$$= \frac{m^2 (b^2 - m^2 + 4h^2)}{4 . (b^2 - m^2)}$$

$$\text{alſo } x = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{m^2(b^2 - m^2 + 4h^2}{b^2 - m^2}}$$

$$= \pm \tfrac{m}{2}\sqrt{\frac{b^2 - m^2 + 4h^2}{b^2 - m^2}}$$

$$= \pm \tfrac{m}{2}\sqrt{1 + \frac{4h^2}{b^2 - m^2}}$$

Dieſe Formel gibt zwei Werthe für x, einen poſitiven und einen negativen. Es iſt auch an der Figur leicht einzuſehen, daß wenn man $MP' = - MP$ und $D'C' = DC$ macht, daraus ein Dreieck ABC' hervorgehen wird, worin $AC' = BC$, $BC' = AC$ und alſo $AC' + BC' = m$ ſeyn wird.

Die gefundene Auflöſungsformel iſt aber, auf gleiche Weiſe wie die des vorigen Beiſpiels, zugleich die Auflöſung für eine verwandte Aufgabe, nämlich von der Aufgabe, wo nicht die Summe $AC + BC$, ſondern die Differenz $AC - BC = \mu$ gegeben iſt. Bei dieſer iſt nämlich die Anſatzgleichung

$$\sqrt{(a + x)^2 + h^2} - \sqrt{(a - x)^2 + h^2} = \mu$$

welche ſich von der vorigen bloß dadurch unterſcheidet, daß ſtatt m, μ und ſtatt $+$ vor dem zweiten Wurzelausdruck $-$ ſteht. Der letzte Unterſchied verſchwindet aber ganz beim wiederholten Quadriren, und zuletzt gibt dieſe Anſatzgleichung die Auflöſung

$$x = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu^2 (b^2 - \mu^2 + 4h^2)}{b^2 - \mu^2}}$$

$$= \pm \tfrac{\mu}{2}\sqrt{\frac{b^2 - m^2 + 4h^2}{b^2 - m^2}}$$

Ueberlegt man hier, ob und in wiefern man x mit doppeltem Zeichen, mit + und mit — nehmen darf, so findet sich ganz etwas andres als vorher.

Im Dreieck ABC ist AC größer als BC, daher AC — BC = μ positiv, und es ist auch MP = x positiv. Im Dreieck ABC′ dagegen ist AC′ kleiner als BC′, daher AC′ — BC′ = μ negativ und auch MP′ = x negativ. Man kann hieraus schließen, daß bei einem positiven μ auch x positiv, bei einem negativen μ aber auch x negativ seyn muß. Diesem gemäß kann man entweder in der Formel

$$x = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu^2 (b^2 - \mu^2 + 4h^2)}{b^2 - \mu^2}}$$

immer bloß das vorgesetzte Zeichen als giltig ansehen, welches mit dem Zeichen von μ übereinstimmt, oder man kann die Formel

$$x = \tfrac{\mu}{2}\sqrt{\frac{b^2 - \mu^2 + 4h^2}{b^2 - \mu^2}}$$

nehmen, worin man bloß das Zeichen + beibehalten hat, so daß x immer dasselbe Zeichen bekommt, welches μ hat.

Wollte man die Formeln

$$x = \pm \frac{m}{2}\sqrt{\frac{b^2 - m^2 + 4h^2}{b^2 - m^2}}$$

und $x = \frac{\mu}{2}\sqrt{\frac{b^2 - \mu^2 + 4h^2}{b^2 - \mu^2}}$

verschmelzen in

$$x = \pm \frac{M}{2}\sqrt{\frac{b^2 - M^2 + 4h^2}{b^2 - M^2}}$$

so müßte man, den eben angestellten Betrachtungen gemäß, sagen, wenn M die Differenz AC — BC seyn solle, so dürfe man nur das + Zeichen als richtig ansehen.

Untersucht man bei dieser Formel, was M für Werthe bekommen darf, wenn x nicht unmöglich werden soll, so findet sich:

1) Man darf für M die Werthe setzen, welche zwischen b und — b liegen. Denn ist $M \,|\!|\, b$, so wird sowol der Zähler $b^2 - M^2 + 4h^2$ als der Nenner $b^2 - M^2$ positiv, daher x möglich. Setzt man aber $M = \pm b$, so wird der Nenner $b^2 - M^2 = 0$ und $x = \frac{M}{2}\sqrt{\frac{4h^2}{0}} = \infty$. Nun drückt aber bei solchen Werthen, welche + b und — b nicht übersteigen, M die Differenz AC — BC aus, und man sieht, daß wirklich diese Differenz nicht die Größe der Grundlinie AB, d. h. nicht b oder — b übersteigen darf. Bei diesen Werthen von M darf man also in

$$x = \pm \tfrac{M}{2}\sqrt{\frac{b^2 - M^2 + 4h^2}{b^2 - M^2}}$$

nur das vorgesetzte $+$ als richtig betrachten.

2) Man darf für M die Werthe setzen, welche größer sind als $\sqrt{b^2 + 4h^2}$. Denn setzt man $M > \sqrt{b^2 + 4h^2}$, so wird $M^2 > b^2 + 4h^2$, daher der Zähler $b^2 - M^2 + 4h^2$ negativ, und eben so der Nenner $b^2 - M^2$ negativ, daher der Bruch $\frac{b^2 - M^2 + 4h^2}{b^2 - M^2}$ positiv, und die Wurzel daraus möglich. Setzt man $M = \sqrt{b^2 + 4h^2}$, so wird der Zähler jenes Bruches o, der Nenner $= -4h^2$, daher $x = o$. Es ist leicht zu sehen, daß bei diesen Werthen von M, welche zwischen $\sqrt{b^2 + 4h^2}$ und $+\infty$ liegen, M die Summe $AC + BC$ ausdrücken muß, welche in der That dann am kleinsten ist, wenn $AC = BC = \sqrt{AM^2 + PC^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 + h^2}$, wo also $M = AC + BC = 2\sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 + h^2} = \sqrt{b^2 + 4h^2}$. Uebrigens ist hier noch sehr auffallend, daß man der Formel gemäß M sowol als negativ wie als positiv ansehen kann, während wir doch bei Entwickelung der Ansatzgleichung uns vorgestellt haben, als seyen AC, BC immer positiv.

3) Setzt man für M Werthe, welche zwischen b und $+\sqrt{b^2 + 4h^2}$ oder zwischen $-b$

und $-\sqrt{b^2+4h^2}$ liegen, so wird x unmöglich. Denn in einem solchen Falle ist der Zähler $b^2-M^2+4h^2$ positiv, der Nenner b^2-M^2 aber wird negativ.

So sieht man also, daß man, um aus der Formel für x etwas Mögliches zu erhalten, der Zahl M geben kann:

die positiven Werthe von 0 bis b und von $+\sqrt{b^2+4h^2}$ bis $+\infty$.

die negativen Werthe von 0 bis $-$ b und von $-\sqrt{b^2+4h^2}$ bis $-\infty$.

Nach den bisherigen Betrachtungen kann dieß Beispiel, eben so wie das VI., zeigen, daß eine Formel in sich die Auflösungen von zwei verschiedenen aber verwandten Aufgaben vereinigen kann.

Jetzt sind noch zwei Räthsel zu lösen, welche sich schon im Vorigen darboten, nämlich:

a) wie läßt sich der Uebelstand vermeiden, daß in der Formel $x = \pm \frac{M}{2}\sqrt{\frac{b^2-M^2+4h^2}{b^2-M^2}}$, wenn M die Differenz AC $-$ BC ausdrücken soll, bloß das vorgesetzte $+$ als richtig angesehen werden darf?

b) Wie läßt es sich vereinigen, daß, wenn M die Summe AC $+$ BC bedeuten soll, nach der unmittelbaren Betrachtung der Aufgabe M bloß

positive, nach der Formel aber auch negative Werthe haben darf?

Hierauf läßt sich nun folgendermaßen antworten:

Jene auffallenden scheinbaren Widersprüche der Auflösungsformel und der unmittelbaren Betrachtung der Aufgabe sind Folgen von der beschränkten Ansicht, daß AC und BC beide immer positiv genommen werden müßten. Da AC und BC keine bestimmte Richtung haben, sondern in die verschiedensten Lagen kommen, so läßt sich nicht behaupten, daß diesen Linien ganz bestimmte Zeichen zukämen; selbst die Formeln

$$AC = \sqrt{(a + x)^2 + h^2}$$

$$BC = \sqrt{(a - x)^2 + h^2}$$

erlauben, diese Linien nach Belieben als positiv oder als negativ zu betrachten. (Vergl. §. 20. I.)

Man erlaube sich also, AC und BC wie mit + so mit — zu nehmen, und sehe die Summe AC + BC als gegeben, = M, an, so erhält man hieraus die Ansatzgleichung

$$\pm\sqrt{(a+x)^2+h^2} \pm \sqrt{(a-x)^2+h^2} = M$$

Nimmt man beidemal das Zeichen —, so wird M zwischen $-\sqrt{b^2+4h^2}$ und $-\infty$ liegen; dadurch ist also schon die Frage b) beantwortet.

In jener Ansatzgleichung finden vier verschie-

dene Fälle in den verschiedenen möglichen Annahmen von Zeichen Statt. Durch Quadriren erhält man

$$\pm 2 . \sqrt{(a^2 + 2ax + x^2 + h^2) . (a^2 - 2ax + x^2 + h^2)}$$
$$= M^2 - 2a^2 - 2h^2 - 2x^2$$

und also hat man in Hinsicht der Zeichen nur noch zwei verschiedene mögliche Fälle. Durch abermaliges Quadriren geben aber diese beiden verschiedenen Fälle ein und das nämliche Resultat, und so erhält man zuletzt die Formel

$$x = \pm \tfrac{M}{2} \sqrt{\frac{b^2 - M^2 + 4h^2}{b^2 - M^2}}$$

Nun ergibt sich:

1) Sieht man AC und BC beide als positiv an, so ist die Summe $AC + BC > \sqrt{b^2 + 4h^2}$. In sofern darf man also dem M Werthe geben, welche zwischen $+ \sqrt{b^2 + 4h^2}$ und $+ \infty$ liegen. Sieht man AC und BC als negativ an, so ist die Summe $AC + BC < - \sqrt{b^2 + 4h^2}$, man darf also für M auch Werthe setzen, welche zwischen $- \sqrt{b^2 + 4h^2}$ und $- \infty$ liegen. Man mag aber für M Werthe setzen, welche zwischen $+ \sqrt{b^2 + 4h^2}$ und $+ \infty$ oder zwischen $- \sqrt{b^2 + 4h^2}$ und $- \infty$ liegen, so kann man immer x sowol positiv als negativ nehmen.

2) Sieht man AC und BC als von verschiedenen Zeichen an, so kann $AC + BC$ alle Werthe

bekommen, welche zwischen b und — b liegen. Man setze nun z. B. M positiv und kleiner als b, so kann AC + BC diesen Werth haben, wenn entweder AC das größere und positiv ist, während BC negativ ist, oder wenn BC das größere und positiv, AC das kleinere und negativ ist. Ein solcher Werth für M gibt aber für x zwei mögliche Werthe, einen positiven, MP, einen negativen MP′, beide läßt auch die unmittelbare Betrachtung der Aufgabe zu, und in sofern ist hiedurch auch die Frage a) beantwortet. Es ist jedoch immer noch zu merken, daß, wenn man den positiven Werth MP annehmen will, man gezwungen ist, AC als positiv, BC als negativ zu denken; daß man aber im Gegentheil, wenn man das negative MP′ nehmen will, AC negativ, BC positiv denken muß.

In dieser Ansicht wurde also die Verschiedenheit in den Annahmen, daß M entweder die Summe AC + BC oder die Differenz AC — BC ausdrücken soll, aufgehoben, und ersetzt durch die Möglichkeit, die Linien AC, BC wie positiv so auch negativ zu denken.

Ganz dasselbe hätte sich auch bei dem vorigen Beispiel VI. in §. 27 anwenden lassen. Es soll daselbst

$$x + PA = m$$
$$x - PA = \mu$$
oder $x \pm PA = M$

seyn, und es ist $PA = \sqrt{b^2 + (x - a)^2}$. Man kann aber PA, selbst nach dieser Formel, auch als negativ betrachten und so sagen:

$$x + PA = x \pm \sqrt{b^2 + (x - a)^2} = M$$

welches die Auflösung gibt:

$$x = \frac{M^2 - c^2}{2(M - a)},$$

worin man also für M jeden beliebigen Werth setzen darf. Bei Werthen von M, welche zwischen + a und + ∞ liegen, muß man aber AP als positiv betrachten, für Werthe des M, die zwischen + a und — ∞ liegen, aber als negativ; umgekehrt, betrachtet man AP als positiv, so darf man für M nur Werthe setzen, die zwischen a und + ∞ liegen; betrachtet man AP als negativ, so darf man für M nur Werthe setzen, die zwischen + a und — ∞ liegen.

Auf diese Weise modificirt sich also der in §. 27 ausgesprochene Satz, daß eine und dieselbe Auflösungsformel die Auflösung von zwei verschiedenen aber verwandten Aufgaben seyn könne, etwas, wenigstens in der Ansicht davon. Doch behält er seine volle Richtigkeit, wenn man nur z. B. in §. 27 die Aufgabe, daß BP + PA = M

seyn soll, wo PA als positiv gedacht wird, als verschieden betrachtet von der, wo PA negativ gedacht wird. Und so gilt jener Satz auch in voller Kraft für das gegenwärtige Beispiel VII, wenn man nur die Aufgabe, daß $AC + BC = M$, sobald AC und BC verschiedene Zeichen haben sollen, ansieht als verschieden von der, wo AC und BC einerlei Zeichen haben sollen.

§. 29.

Beispiel VIII.

[Fig. 17.] Das Dreieck ABC sey gegeben, man sucht eine Linie CQ, aus der Spitze C zur Grundlinie gezogen, welche die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Grundlinie AQ, QB sey.

Das Dreieck ABC sey bestimmt durch Angabe seiner Höhe CP und durch die Abschnitte PA, PB, welche durch diese Höhe auf der Grundlinie gebildet werden. Es heiße

$$PA = a;$$
$$PB = b,$$
$$PC = c,$$

wobei zu bemerken ist, daß in der Figur PA, indem es von P aus links liegt, für negativ gelten muß, während PB positiv ist. Es ist also

a hier negativ, b und c gelten aber für positiv. Wäre der Winkel BAC stumpf, so würde PA, also auch a positiv seyn.

Die Lage von CQ suche man zu bestimmen durch das unbekannte $PQ = x$, was also auch positiv oder negativ seyn kann.

Nun soll seyn

$AQ : QC = QC : QB$ oder $QC^2 = AQ \,.\, QB$

Zur Richtigkeit dieser Gleichungen ist erforderlich, daß AQ und QB von gleichen Zeichen, beide positiv oder beide negativ sind. Dieß findet aber nur Statt, wenn Q zwischen A und B, in der Grundline AB selbst liegt. Man muß also die obige Aufgabe hier ganz darauf einschränken, daß, wie auch oben gesagt wurde, CQ nach der Grundlinie selbst, nicht nach ihrer Verlängerung gezogen ist.

Nun ist $AQ = AP + PQ = PQ - PA = x - a$

$QB = QP + PB = PB - PQ = b - x$

$QC = \sqrt{PC^2 + PQ^2} = \sqrt{c^2 + x^2}$

So hat man also

$$(x - a) \,.\, (b - x) = (\sqrt{c^2 + x^2})^2$$

$$-ab + ax + bx - x^2 = c^2 + x^2$$

$$2x^2 - (a + b)\, x = - ab - c^2$$

daher $x = \dfrac{a + b \pm \sqrt{a^2 - 6ab + b^2 - 8c^2}}{4}$

Hienach hat x, wenn es möglich ist, mei-

stens zwei verschiedene Werthe, in der Figur PQ′, PQ″. Es ist unmöglich, wenn

$$c > \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - 6ab}{8}};$$

es hat nur einen einzigen Werth, nämlich $\frac{a+b}{4}$, wenn $c = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - 6ab}{8}}$. Ein möglicher Werth des x wird aber immer einen Punct Q bestimmen, der innerhalb der Grundlinie AB liegt, wie dieß schon die Betrachtung erforderte, daß die zu Grunde gelegte Proportion AQ : QC = QC : QB nur richtig war, wenn Q innerhalb der Grundlinie lag.

Nun aber fragt sich: Gibt es nicht auch wol in der Verlängerung der Grundlinie einen Punct q, welcher mache, daß qC die mittlere Proportionale zwischen den beiden Linien Aq, Bq sey? Wie findet man diesen Punct q?

Es ergibt sich leicht, daß hier die Gleichungen

$$Aq : qC = qC : qB \text{ oder } qC^2 = Aq \,.\, qB$$

falsch seyn würden, indem Aq und qB auf jeden Fall von verschiedenen Zeichen seyn würden, so daß das Product Aq . qB negativ seyn würde und also nicht $= qC^2$ seyn könnte. Dagegen wird der Ansatz

$$Aq : qC = qC : Bq \text{ oder } qC^2 = Aq : Bq$$

vollkommen richtig seyn, denn Aq und Bq werden, wenn q in der Verlängerung von AB rechts hin liegt, beide positiv, wenn q in der Verlängerung von BA links hin liegt, beide negativ, also beide immer von gleichem Zeichen seyn. Nun ist

$$Aq = AP + Pq = Pq - PA = x - a$$
$$Bq = BP + Pq = Pq - PB = x - b$$
$$qC = \sqrt{c^2 + x^2}$$

also $c^2 + x^2 = (x - a) \cdot (x - b)$

$$c^2 + x^2 = x^2 - ax - bx + ab$$

Hier hebt sich x^2, es bleibt also nur eine Gleichung des ersten Grades zurück, woraus man erhält

$$x = \frac{ab - c^2}{a + b}.$$

Hier hat x immer nur einen Werth; er ist $= \pm \infty$, wenn $a + b = 0$ oder $a = - b$, d. h. wenn P in der Mitte von AB liegt, oder wenn ABC ein gleichschenkliges Dreieck ist, worin $AC = BC$.

So bemerkt man also die größte Verschiedenheit zwischen den Behandlungen und Auflösungen jener so nahe verwandten Aufgaben, wobei für jede eine andre Ansatzgleichung, so wie eine andre Auflösung erscheint.

Es gibt für jede dieser Aufgaben eine leichte geometrische Auflösung durch Construction, aus der

Theorie des Kreises hergenommen. Man construire um das gegebene Dreieck einen Kreis, verlängere CP bis PR = CP, ziehe durch R eine Parallele mit AB, so wird dieselbe den Kreis entweder in 2 Puncten schneiden, oder in einem berühren, oder gar nicht treffen. Im ersten oder zweiten Falle ziehe man zu den Schnittpuncten Linien, in der Figur CS′, CS″, so sind die Linien CQ′, CQ″ die gesuchten mittlern Proportionalen; im Fall daß die Parallele durch R den Kreis berührt, hat man nur eine solche Linie CQ; im Fall daß dieselbe den Kreis gar nicht trifft, gibt es gar keine Linie CQ, und dieß geschieht dann, wenn die Formel

$$x = \frac{a + b \pm \sqrt{a^2 - 6ab + b^2 - 8c^2}}{4}$$

etwas unmögliches gibt, wenn $c > \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - 6ab}{8}}$.

Die Richtigkeit dieser Construction ist leicht einzusehen. Nach einem bekannten Lehrsatz ist AQ . QB = QC . SQ, nun ist SQ = QC, weil RP = PC, daher ist AQ . QB = QC^2, wie es seyn sollte.

Auf diese Weise fand man aber bloß die Puncte Q, welche in AP liegen; wie findet man, um die zweite Aufgabe auch durch Construction zu lösen, den Punct q, der in der Verlängerung von AB liegt?

Man findet q, wenn man am Puncte C eine

Tangente an den Kreis legt; die Verlängerung von AB wird von der Tangente im gesuchten Puncte q geschnitten; q wird rechts von P liegen, wenn AP größer ist als PB; es wird links von P liegen, wenn AP kleiner ist als PB; es wird kein q Statt finden, die Tangente wird mit AB parallel seyn, wenn AP = PB.

So zeigt sich also auch bei diesen Constructionen die größte Verschiedenheit zwischen jenen so verwandten Aufgaben, und es war gerade die Absicht dieses Beispiels, zu zeigen, wie verwandte geometrische Aufgaben, von denen man glauben sollte, sie würden sich durch eine einzige Formel lösen lassen, ganz verschiedene Auflösungen erfordern und ganz verschiedene Formeln geben können, indem der bloße Gebrauch des Additionsgegensatzes nicht hinreicht, diese Aufgaben und ihre Auflösungen in Eins zusammenzufassen.

§. 30.

Beispiel IX.

[Fig. 11.] Im rechtwinkligen Dreiecke ABC kennt man die Hypothenuse BC = a, und die Summe der Katheten und des Perpendikels AD, nämlich AB + AC + AD = b, man sucht das Perpendikel AD = x.

Die unbekannte Kathete AB heiße y, dann

ist die andre $AC = b - x - y$. Man hätte auch AC y nennen können, dann würde $AB = b - x - y$ geworden seyn. Man sieht hieraus, daß wenn man nachher y aufsuchen wollte, man zwei Werthe desselben finden müßte, wovon der eine AB, der andre AC ausdrückt.

Das Perpendikel $AD = x$ dagegen kann nur einen einzigen Werth bekommen, wie man leicht sieht.

Nun ist im rechtwinkligen Dreiecke ABC

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

also $a^2 = y^2 + (b - x - y)^2$

oder $2y^2 + 2xy - 2by + x^2 - 2bx - a^2 + b^2 = 0$ (A)

Ferner ist, weil $\triangle ABC \sim DAC$

$$BC : AB = AC : AD.$$

also $a : y = (b - x - y) : x$

$$ax = y \cdot (b - x - y)$$

oder $- y^2 - xy + by - ax = 0$ (B)

Man muß nun y aus beiden Gleichungen A und B eliminiren. Dieß geschieht, indem man B mit 2 multiplicirt und dann beide Gleichungen addirt. So erhält man

$$x^2 - 2ax - 2bx - a^2 + b^2 = 0$$

Hieraus ergibt sich

$$x = a + b \pm \sqrt{2a^2 + 2ab}$$

Hienach hätte x zwei verschiedene Werthe, welche allerdings jenen Gleichungen A und B Genüge leisten. Aber, wie schon oben gesagt wurde,

kann x als Auflösung obiger geometrischen Aufgabe nur einen einzigen Werth haben. Jetzt ist daher zu untersuchen, welcher von jenen beiden Werthen weggeworfen, welcher als richtig behalten werden muß.

Bei der ganzen Aufgabe hat man x und y, eben so wie a und b, als positive Zahlen angesehen, es ist wenigstens kein Grund vorhanden, warum eine derselben negativ genommen werden sollte; x soll also nicht negativ seyn. Ferner muß aber AD kleiner als AB + AC + AD, also x kleiner als b seyn. Nähme man nun den Werth $x = a + b + \sqrt{2a^2 + 2ab}$, so erhielte man zwar für x etwas positives, aber etwas größeres als b; dieß ist also ein falscher Werth. Nimmt man aber $x = a + b - \sqrt{2a^2 + 2ab}$, so erhält man auch etwas positives, denn es ist

$$b > a$$

$$b^2 > a^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 > a^2 + 2ab + a^2$$

$$(a + b)^2 > 2a^2 + 2ab$$

$$a + b > \sqrt{2a^2 + 2ab}$$

Aber dieser Werth von x ist auch, wie leicht zu sehen, kleiner als b, er erfüllt also beide obige Bedingungen und ist der einzige richtige. Es ist also

$$x = a + b - \sqrt{2a^2 + 2ab}$$

die einzige brauchbare Auflösung der obigen geometrischen Aufgabe.

Doch vorzüglicher und eindringender ist folgende Art zu prüfen, welcher Werth der richtige sey.

In der Aufgabe fragt man nach einem wirklichen rechtwinkligen Dreiecke, bei dem alle Linien bestimmte mögliche, am besten auch positive Werthe haben. Gibt es eine algebraische Auflösung der Gleichungen A und B, wobei für eine oder einige der Linien sich unmögliche Ausdrücke ergeben, so kann diese bloß algebraische Auflösung obiger Gleichungen durchaus nicht als richtige Auflösung der geometrischen Aufgabe angesehen werden. Hat man also für x einen Werth gefunden, so muß derselbe nicht bloß selbst etwas mögliches, positives seyn, sondern er muß auch den andern Linien der Figur mögliche Werthe geben.

Man kann also jene Werthe

$$x = a + b + \sqrt{2a^2 + 2ab}$$

und $x = a + b - \sqrt{2a^2 + 2ab}$

prüfen, indem man untersucht, was dieselben für y geben. Uebrigens ist schon oben gesagt worden, daß hiebei y zwei verschiedene Werthe bekommen muß, wovon der eine AB, der andre AC ausdrückt.

Nun ergibt sich aus der Gleichung B sehr leicht.

$$y = \frac{b-x}{2} \pm \sqrt{-ax + \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}bx + \tfrac{1}{4}b^2}$$

1) Man setze hier $x = a + b + \sqrt{2a^2 + 2ab}$, so kommt

$$y = -\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2ab}$$
$$\pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-a^2 - 2ab - 2a\sqrt{2a^2 + 2ab}}$$

also ist hier y etwas unmögliches; jener Werth $x = a + b + \sqrt{2a^2 + 2ab}$ muß also verworfen werden.

2) Man setze $x = a + b - \sqrt{2a^2 + 2ab}$, so kommt

$$y = -\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2ab}$$
$$\pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-a^2 - 2ab + 2a\sqrt{2a^2 + 2ab}}$$

Diese Formel zeigt, daß y hier zuweilen möglich seyn wird, daß also auch die Formel $x = a + b - \sqrt{2a^2 + 2ab}$ als giltig angesehen werden kann.

Uebrigens ist aus dem Vorigen schon klar, daß, nach Annahme von a, die Werthe, welche b bekommen kann, in bestimmte Gränzen eingeschlossen sind. b darf nicht kleiner seyn als a; nähme man b kleiner als a, so würde die obige Formel für x etwas negatives geben. b darf aber auch nicht größer seyn, als $\tfrac{1}{2}a + a\sqrt{2}$, denn aus

der Betrachtung der Aufgabe erhellt geradezu, daß b am größten seyn wird, wenn $AB = AC = a\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{a.\sqrt{2}}{2}$, dann ist $AD = \frac{1}{2}a$ und $AB + AC + AD = \frac{1}{2}a + a\sqrt{2}$. Es findet sich dieß aber auch durch Betrachtung obiger Formel für y. Diese gibt etwas unmögliches, wenn $-a^2 - 2ab + 2a\sqrt{2a^2 + 2ab}$ negativ ist, und dieß ist der Fall, wenn

$$a^2 + 2ab > 2a\sqrt{2a^2 + 2ab}$$
$$a + 2b > 2\sqrt{2a^2 + 2ab}$$
$$a^2 + 4ab + 4b^2 > 8a^2 + 8ab$$
$$b^2 - ab > \tfrac{7}{4}a^2$$
$$\text{oder } b > \tfrac{a}{2} + a\sqrt{2}$$

Exempel.

1) Es sey $a = 2, \quad b = 2$

Hier ist $x = 4 - \sqrt{16} = 0$

$$y = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-3+4} = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

2) Es sey $a = 2, \quad b = 1$

Hier kommt $x = 3 - \sqrt{10}$, also negativ, daher ist die Aufgabe nach der bisherigen Ansicht unlösbar.

$$y = -1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{10} \pm \sqrt{-2 + \sqrt{10}},$$

ein Ausdruck, der einen positiven und einen negativen Werth hat, den einen für AB, den andern für AC.

Jetzt mag jedoch bemerkt werden, daß diese Auflösung durchaus nicht ungereimt wäre, wenn man sich nur erlauben wollte, die Höhe AD und eine von den Katheten als negativ anzusehen. Dächte man x und etwa $y = AB$ negativ, so würde $AB + AC + AD$ d. h. b kleiner werden als a, man könnte auch hier statt AC setzen $b - x - y$, und die Ansatzgleichungen

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$
$$BC : AB = AC : AD$$

würden hier ebenfalls Statt finden, daher auch die Auflösungen. Man könnte also allerdings ein Dreieck construiren, wo

$$BC = 2$$
$$AB = -1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{10} - \sqrt{-2 + \sqrt{10}} = -0{,}49695$$
$$AC = -1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{10} + \sqrt{-2 + \sqrt{10}} = 1{,}65923$$
$$AD = 3 - \sqrt{10} = -0{,}16228$$

und $AB + AC + AD = 1$.

3) Es sey $a = 2$, $b = 4$.

Dieß gibt $x = 6 - 2\sqrt{6}$ positiv und möglich.

$y = -1 + \sqrt{6} \pm \sqrt{-5 + 2\sqrt{6}}$, unmöglich.

Daher ist hier die ganze Aufgabe unmöglich.

4) Es sey $a = 2$, $b = 3$

Dieß gibt $x = 5 - 2\sqrt{5} = 0{,}52786 = AD$

$$y = -1 + \sqrt{5} \pm \sqrt{-4 + \sqrt{20}}$$
$$= \begin{cases} 1{,}91719 = AB \\ 0{,}55495 = AC \end{cases}$$

Diese hier abgehandelte Aufgabe hat auch Carnot in der Geometrie der Stellung, Th. II. S. 126 u. 127. n. 62. Carnot nimmt Anstoß daran, daß von den beiden Werthen, die man darin für x erhält, und die beide positiv sind, nur einer giltig ist. Er stellt auch sonst gar keine nähere Betrachtungen darüber an. Dieselbe Aufgabe soll sich auch in Newtons Arithmetica universalis und in Bossuts Application de l'Algèbre à la Géométrie befinden; beide Werke sind aber dem Verfasser nicht zur Hand, er weiß also nicht, in welche Betrachtungen über diese Aufgabe sich Newton und Bossut vielleicht einlassen.

§. 31.

An den bis jetzt behandelten Beispielen wird sich hinlänglich zeigen, wie anwendbar in solchen geometrischen Aufgaben der Additionsgegensatz ist, sobald man eine vernünftige Theorie desselben besitzt, und man von demselben, wie überhaupt von der Algebra nichts verlangt, was sie nicht zu leisten vermögen. Aber zugleich werden auch diese Beispiele gezeigt haben, wie behutsam man bei diesen Anwendungen des Additionsgegensatzes seyn muß. Sie machen vorzüglich auf folgende Vorsichtsmaßregeln aufmerksam:

Man berücksichtige immer gehörig die Ableitung der Ansatzgleichungen, und vergesse

nicht, welche Vorstellung von der gesuchten Größe man bei der Ableitung der Ansatzgleichung hatte, um bei der Auflösung nur solche Werthe einer gesuchten Größe als richtig anzusehen, welche jenen Vorstellungen zusagen. (Beispiel II und III.)

Man berücksichtige die Abhängigkeit des Additionsgegensatzes der Flächenräume vom Additionsgegensatze der Linien. (Beisp. IV u. V.)

Scheint eine Auflösung zu weit und auch in gewissen Fällen anwendbar, wo eigentlich die Aufgabe selbst, so wie sie zuerst ausgesprochen war, nicht mehr Statt haben kann: so untersuche man, ob und wie man die Aufgabe modificiren und erweitern könne, um sie auch auf jene Fälle zu erstrecken. (Beisp. VI. und VII.)

Man glaube nicht gleich, wenn zwei Aufgaben sehr verwandt scheinen, indem z. B. ein Punct in der einen eine andre Lage bekommt, als er in der andern hatte, daß sie auch durch eine und dieselbe Formel sich lösen lassen müssen; sondern man untersuche, ob die Ansatzgleichung für die eine auf eine besondre Weise geändert werden müsse, um die Ansatzgleichung für die andre zu werden, und was daraus für die Auflösung erfolge. (Beispiel VIII.)

Man berücksichtige, ob ein gefundener Werth einer unbekannten Größe etwa deßhalb verworfen werden müsse, weil er andre damit im Zusammenhange stehende Größen, welche reell seyn sollten, unmöglich macht. (Beispiel IX.)

Vierter Abschnitt.

Von der Anwendung des Additionsgegensatzes in der Trigonometrie.

§. 32.

Ein groſses Feld zu den wichtigſten und intereſſanteſten Anwendungen des Additionsgegenſatzes bietet die Trigonometrie oder Goniometrie dar. Wol in keinem andern Theile der reinen Mathematik zeigen ſich die mit der Annahme des Additionsgegenſatzes verbundenen Vortheile deutlicher, als gerade in der Trigonometrie. Auch iſt die richtige Anwendung des Additionsgegenſatzes in der Trigonometrie wenig Schwierigkeiten unterworfen, ſobald man eine geſunde arithmetiſche Theorie dieſes Gegenſatzes und deutliche Kenntniſſe vom Additionsgegenſatze bei geraden Linien und bei Winkeln beſitzt. Um ſo auffallender iſt es, daſs doch ſo lange über dieſem Gegenſtande ein gewiſſes Dunkel geſchwebt hat, daſs man ſo häufig irrige Anſichten davon vorgetragen hat, nachdem doch in der Hauptſache ſchon das Richtige bekannt war. Es iſt keinesweges des Verfaſſers Abſicht, dieſen Ge-

genstand ausführlich zu behandeln, er wird vielmehr bloß versuchen, eine richtige Grundlage desselben zu geben, und manches durch genauere Verbindung mit dem schon Vorgetragenen so wie durch eigenthümliche Darstellung in ein helleres Licht zu setzen.

§. 33.

Es soll jetzt untersucht werden, in wiefern bei den trigonometrischen Functionen der Additionsgegensatz anwendbar ist, wann die Sinus, Cosinus, Tangenten, Cotangenten, Secanten und Cosecanten positiv und wann sie negativ sind.

Die trigonometrischen Functionen sind eigentlich Zahlen, welche von der Größe der Winkel, wozu sie gehören, abhängig sind. Man pflegt aber sie auf eine bekannte Weise auch als Linien an einem Kreise darzustellen, und dann sind gerade die Zahlen, welche das Verhältniß jener Linien zum Radius des Kreises ausdrücken, die eigentlichen trigonometrischen Functionen der Winkel. Es entsteht daher eine gewisse Zweideutigkeit der Worte Sinus u. s. w., und um dieselbe zu vermeiden, mögen die Sinus, Cosinus u. s. w. als Zahlen bezeichnet werden durch sin., cos. u. s. w., als Linien aber durch Sin., Cos. u. s. w. Man hat also

$$\frac{\text{Sin a}}{\text{r}} = \text{sin a, oder Sin a} = \text{r . sin a}$$

$$\frac{\text{Cos a}}{r} = \text{cos a}, \text{ oder Cos a} = r \text{ . sin a}$$

u. s. w.

indem r den Radius des Kreises bezeichnet.

Nun mag gezeigt werden, wie an den Sinus u. s. w. als Linien der Additionsgegensatz sich zeigt, was sich hier findet, wird sich dann leicht auf die trigonometrischen Functionen als Zahlen ausdehnen lassen. Nothwendig ist dabei besonders das schon früher über den Additionsgegensatz gerader Linien Gesagte zu kennen.

[Fig. 18.] Zuerst liege der Radius in der Lage CA. Er werde nach der linken Seite hin herumgedreht, um positive Winkel zu erzeugen (§. 16. I.), und beschreibe so den ersten Quadranten ABC, dann den zweiten BCa, den dritten aCb, den vierten bCA.

1. CA sey zuerst durch Drehung in die Lage CD′ gekommen, und habe so den positiven spitzen Winkel ACD′ = φ' beschrieben. Wie lassen sich hier die trigonometrischen Functionen dieses Winkels φ' als Linien darstellen?

Man fälle zuerst die Perpendikel D′F′ auf CA, D′G′ auf CB, so bilden die Linien

CF′ den Cosinus von φ'

CG′ den Sinus von φ'

Sowol CF′ als CG′ gelten hier für positiv, indem F′ rechts von C, G′ über C liegt.

Man verlängere CD′ bis in H′ und K′, so ist

AH′ die Tangente von φ'

BK′ die Cotangente von φ'

Auch diese Linien sind beide positiv, indem H′ über A, K′ rechts von B liegt.

Man lege an D′ die Berührungslinie h′k′, so ist

Ch′ die Secante von φ'

Ck′ die Cosecante von φ'

Auch diese Linien sind beide positiv, denn h′ liegt rechts von C, k′ liegt über C.

Für den positiven spitzen Winkel φ' sind also die Linien Cos φ', Sin φ', Tang φ', Cot φ' Sec φ', Cosec φ' alle positiv. Mit diesen Linien stimmen nun die Zahlen cos φ', sin φ' u. s. w. im Zeichen überein; denn die Zeichen dieser Zahlen sollen gerade die Lage der Linien CF′, CG′ u. s. w. ausdrücken, man muß daher in $\cos\varphi' = \frac{\text{Cos}\,\varphi'}{r}$, $\sin\varphi' = \frac{\text{Sin}\,\varphi'}{r}$ u. s. w. den Radius r als absolute oder positive Größe betrachten. Ganz dasselbe findet auch bei den Functionen jedes andern Winkels, nicht bloß des Winkels φ' Statt.

Die trigonometrischen Functionen eines positiven spitzen Winkels sind also alle positiv.

2. Durch fortgesetztes Drehen komme der Ra-

dius in die Lage CD'', wo der stumpfe Winkel ACD'' = 180° — φ' = φ''. Dann ist:

$CF'' = - CF'$, d. h. $\text{Cos}\,\varphi'' = - \text{Cos}\,\varphi'$
und $\cos(180^0 - \varphi) = - \cos\varphi$.

$CG'' = CG'$, d. h. $\text{Sin}\,\varphi'' = \text{Sin}\,\varphi'$
und $\sin(180^0 - \varphi) = \sin\varphi$.

$AH'' = - AH'$, d. h. $\text{Tang}\,\varphi'' = - \text{Tang}\,\varphi'$
und $\text{tang}(180^0 - \varphi) = - \text{tang}\,\varphi$.

$BK'' = - BK'$, d. h. $\text{Cot}\,\varphi'' = - \text{Cot}\,\varphi'$
und $\cot(180^0 - \varphi) = - \cot\varphi$.

$Ch'' = - Ch'$, d. h. $\text{Sec}\,\varphi'' = - \text{Sec}\,\varphi'$
und $\sec(180^0 - \varphi) = - \sec\varphi$.

$Ck'' = Ck'$, d. h. $\text{Cosec.}\,\varphi'' = \text{Cosec}\,\varphi'$
und $\text{cosec}(180^0 - \varphi) = \text{cosec}\,\varphi$.

Für positive stumpfe Winkel sind also die Sinus und Cosecanten positiv, die Cosinus, Tangenten, Cotangenten und Secanten aber negativ.

3. Der Radius sey in die Lage CD''' gekommen, und der überstumpfe Winkel ACD''' = 180° + φ' = φ'''. Dann ist:

$CF''' = - CF'$, d. h. $\text{Cos}\,\varphi''' = - \text{Cos}\,\varphi'$
und $\cos(180^0 + \varphi) = - \cos\varphi$.

$CG''' = - CG'$, d. h. $\text{Sin}\,\varphi''' = - \text{Sin}\,\varphi'$
und $\sin(180^0 + \varphi) = \sin\varphi$.

$AH''' = AH'$, d. h. $\text{Tang}\,\varphi''' = \text{Tang}\,\varphi'$
und $\text{tang}(180^0 + \varphi) = \text{tang}\,\varphi$.

$BK''' = BK'$, d. h. $\text{Cot}\,\varphi''' = \text{Cot}\,\varphi'$
und $\cot(180^0 + \varphi) = \cot\varphi$.

$Ch''' = - Ch'$, d. h. $Sec\,\varphi''' = - Sec\,\varphi'$
und $sec\,(180^0 + \varphi) = - sec\,\varphi$.
$Ck''' = - Ck'$, d. h. $Cosec\,\varphi''' = - Cosec\,\varphi'$
und $cosec\,(180^0 + \varphi) = - cosec\,\varphi$.

Für positive Winkel, die größer als 180^0 und kleiner als 270^0 sind, sind die Tangenten und Cotangenten positiv, alle andern Functionen sind negativ.

4. Der Radius sey in die Lage CD^{IV} gekommen, und der überstumpfe Winkel $ACD^{IV} = 360^0 - \varphi' = \varphi^{IV}$, so ist:

$CF^{IV} = CF'$, d. h. $Cos\,\varphi^{IV} = Cos\,\varphi'$
und $cos\,(360^0 - \varphi) = cos\,\varphi$.
$CG^{IV} = - CG'$, d. h. $Sin\,\varphi^{IV} = - Sin\,\varphi'$
und $sin\,(360^0 - \varphi) = - sin\,\varphi$.
$AH^{IV} = - AH'$, d. h. $Tang\,\varphi^{IV} = - Tang\,\varphi'$
und $tang\,(360^0 - \varphi) = - tang\,\varphi$.
$BK^{IV} = - BK'$, d. h. $Cot\,\varphi^{IV} = - Cot\,\varphi'$
und $cot\,(360^0 - \varphi) = - cot\,\varphi$.
$Ch^{IV} = Ch'$, d. h. $Sec\,\varphi^{IV} = Sec\,\varphi'$
und $sec\,(360^0 - \varphi) = sec\,\varphi$.
$Ck^{IV} = - Ck'$, d. h. $Cosec\,\varphi^{IV} = - Cosec\,\varphi'$
und $cosec\,(360^0 - \varphi) = - cosec\,\varphi$.

Bei Winkeln, welche zwischen 270^0 und 360^0 liegen, sind also bloß die Cosinus und Secanten positiv, alles Uebrige ist negativ.

Die Cosinus haben sich immer auf dem Durchmesser Aa, die Sinus auf dem Durchmesser Bb,

die Tangenten auf der Berührungslinie MN, die Cotangenten auf der Berührungslinie RS, die Secanten auf dem verlängerten Durchmesser Aa, die Cosecanten auf dem verlängerten Durchmesser Bb dargestellt. Hierin hat man Grund, zu nennen:

den Durchmesser Aa mit seinen Verlängerungen: die Scale der Cosinus und der Secanten;

den verlängerten Durchmesser Bb: die Scale der Sinus und der Cosecanten;

die Berührungslinie MN: die Scale der Tangenten;

die Berührungslinie RS: die Scale der Cotangenten.

Vorzüglich merkwürdig sind die Werthe, welche die trigonometrischen Functionen für die Winkel 0^0, 90^0, 180^0, 270^0 bekommen.

1. Man hat $\cos\ 0^0 = 1$
$\sin\ 0^0 = 0$
$\tan g\ 0^0 = 0$
$\cot\ 0^0 = \pm\ \infty$.

Daß $\cot\ 0^0 = \pm\ \infty$ zeigt sich daran, daß hier die Linie CD in der Lage CA geblieben, also parallel mit der Scale der Cotangenten RS liegt, wo also $BK = \pm\ \infty$. So wird hier die Cotangente aus $+$ in $-$ übergehen durch $\pm\ \infty$. Ein Beispiel von dem, was §. 15. II. vom Ueber=

gange einer Linie aus + in — durch ± ∞ gesagt wurde.

$$\sec 0^0 = 1$$
$$\text{cosec } 0^0 = \pm \infty.$$

Denn für cosec 0^0 ist hk parallel mit der Scale der Cosecanten.

2. Dann ist
$$\cos 90^0 = 0$$
$$\sin 90^0 = 1$$
$$\text{tang } 90^0 = \pm \infty$$
$$\cot 90^0 = 0$$
$$\sec 90^0 = \pm \infty$$
$$\text{cosec } 90^0 = 1$$

3. Ferner
$$\cos 180^0 = -1$$
$$\sin 180^0 = 0$$
$$\text{tang } 180^0 = 0$$
$$\cot 180^0 = \pm \infty$$
$$\sec 180^0 = -1$$
$$\text{cosec } 180^0 = \pm \infty.$$

4. Endlich
$$\cos 270^0 = 0$$
$$\sin 270^0 = -1$$
$$\text{tang } 270^0 = 0$$
$$\cot 270^0 = 0$$
$$\sec 270^0 = \pm \infty$$
$$\text{cosec } 270^0 = -1$$

Für einen Winkel von 360° kehren die Werthe der Functionen von 0° wieder.

Das vorhin über die Zeichen der Functionen

bei verschiedenen Zuständen des Winkels, und über die Werthe der Functionen bei den Winkeln 0^d, 90^D, 180^0, 270^0 Ausgemittelte läßt sich sehr bequem in einer Zeichnung wie Fig. 19 darstellen. Man sieht hier sehr deutlich den Uebergang der Functionen aus + in — oder aus — in + durch 0 oder durch $\pm\infty$. Bei den Sinus und Cosinus findet bloß der Uebergang durch 0, bei den Secanten und Cosecanten bloß der Uebergang durch $\pm\infty$, bei den Tangenten und Cotangenten aber finden beide Arten von Uebergängen Statt.

Auch negativen Winkeln kommen trigonometrische Functionen zu. [Fig. 18.] Man drehe CA rechts hin in die Lage CD^{IV}, so ist der negative spitze Winkel $ACD^{IV} = - ACD' = - \varphi'$ und man findet sehr leicht

$CF^{IV} = CF'$ oder $\text{Cos}(-\varphi') = \text{Cos}\,\varphi'$

$CG^{IV} = -CG'$ oder $\text{Sin}(-\varphi') = -\text{Sin}\,\varphi'$

$AH^{IV} = -AH'$ oder $\text{Tang}(-\varphi') = -\text{Tang}\,\varphi'$

$BK^{IV} = -BK'$ oder $\text{Cot}(-\varphi') = -\text{Cot}\,\varphi'$

$Ch^{IV} = Ch'$ oder $\text{Sec}(-\varphi') = \text{Sec}\,\varphi'$

$Ck^{IV} = -Ck'$ oder $\text{Cosec}(-\varphi') = -\text{Cosec}\,\varphi'$.

Daher ist auch

$$\cos(-\varphi) = \cos\varphi$$
$$\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$$
$$\text{tang}(-\varphi) = -\text{tang}\,\varphi$$
$$\cot(-\varphi) = -\cot\varphi$$

$$\sec(-\varphi) = \sec\varphi$$

$$\operatorname{cosec}(-\varphi) = -\operatorname{cosec}\varphi$$

Dieß sind Sätze, welche nicht bloß gelten, wenn φ ein spitzer Winkel ist, sondern dieser Winkel φ mag Werthe haben, welche er will.

§. 34.

Die im vorigen §. gegebene Darstellung der trigonometrischen Functionen als Linien unterscheidet sich sehr von der gewöhnlichen.

Man pflegt sonst diejenigen Winkel, welche durch Drehung rechts hin entstehen, als positiv, die, welche durch Drehung links hin entstehen, als negativ zu betrachten, und dem Radius statt CA die anfängliche Lage zu geben, welche in der Figur 19 Ca hat. Dann müssen aber, sehr unbequem, in den Scalen Aa und RS die links hin liegenden Linien für positiv, die rechts hin liegenden für negativ gelten, der sonstigen Gewohnheit zuwider. Eben hierin liegt auch der Grund, warum schon früher, §. 16. I., gesagt wurde, eine Drehung links hin solle positive Winkel geben.

Man pflegt zwar sonst die Cosinus auf Aa, die Tangenten auf MN, die Cotangenten auf RS darzustellen, und hat also Scalen der Cosinus, der Tangenten, und der Cotangenten, obschon man sich nicht dieser Benennung bedient; aber nicht so mit dem Sinus, den Secanten und Cosecanten. Man

pflegt sonst DF als Sinus, CH als Secante, CK als Cosecante anzusehen; und allerdings ist DF = CG, CH = Ch, CK = Ck; aber hiebei zeigt sich nicht so leicht, wo man positive, wo negative Sinus, Secanten, Cosecanten haben wird. In Hinsicht der Sinus ist es ganz auf ähnliche Weise vorzüglicher, dieselben auf Bb darzustellen, wie es besser ist bei der Bestimmung durch Coordinaten die Ordinaten auf der Ordinatenaxe zu verzeichnen, als auf gewöhnliche Weise dafür die mit der Ordinatenaxe parallelen Perpendikel auf die Abscissenaxe anzunehmen. (§. 18. I.). In Hinsicht der Secanten und der Cosecanten hat man oft bei der gewöhnlichen Darstellung Schwierigkeiten in den oben darüber aufgestellten Sätzen gefunden, wann sie positiv, wann sie negativ sind. Diese Schwierigkeiten werden wol am besten durch die oben gegebene Darstellung vermieden.

§. 35.

Kennt man eines Winkels Sinus und Cosinus, so kann man seine übrigen vier trigonometrischen Functionen sehr leicht hieraus berechnen. Es ist nämlich:

$$\text{tang} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

$$\cot\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

$$\sec\varphi = \frac{1}{\cos\varphi},$$

$$\operatorname{cosec}\varphi = \frac{1}{\sin\varphi}.$$

Man sieht hieraus, daß die Tangente und die Cotangente eines Winkels unter sich immer von gleichen Zeichen sind, und zwar positiv, wenn der Sinus und der Cosinus desselben Winkels in den Zeichen übereinstimmen, negativ, wenn dieselben verschiedene Zeichen haben. Dagegen die Secante muß im Zeichen immer mit dem Cosinus, die Cosecante immer mit dem Sinus von gleichem Zeichen seyn, denn die Secante steht im Multiplicationsgegensatze mit dem Cosinus und die Cosecante mit dem Sinus, eben so wie die Cotangente mit der Tangente. So kann also auch nach diesen Formeln über die Zeichen der Tangenten, Cotangenten, Secanten und Cosecanten keine Ungewißheit herrschen, sobald man über die Zeichen der Sinus und Cosinus im Reinen ist. Was aber für diese gilt, muß ursprünglich, durch Betrachtung der Figur, abgeleitet werden. Denn die Formeln:

$$\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2 = 1$$

oder $\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos\varphi^2}$

und $\cos\varphi = \sqrt{1 - \sin\varphi^2}$

entscheiden hierüber gar nichts. (Vergl. §. 20. I.)

Die Formeln tang $\varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$, cot $\varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$ zeigen, daß die Tangenten und Cotangenten durch o und durch $\pm \infty$ aus einem Zeichen in das andre übergehen müssen, indem die Zähler und die Nenner jener Brüche abwechselnd durch o gehen. Die Formeln sec $\varphi = \frac{1}{\cos \varphi}$, cosec $\varphi = \frac{1}{\sec \varphi}$ zeigen, daß die Secanten und Cosecanten bloß durch $\pm \infty$ aus einem Zeichen in das entgegengesetzte übergehen können, indem bloß die Nenner dieser Brüche veränderlich sind und durch o gehen können. So stimmt das, was sich bei arithmetischer Ableitung aus jenen Formeln für diese Uebergänge ergibt, ganz mit dem überein, was oben die Betrachtung der Figur lehrte.

Anhang I.

Ueber Carnot's Ansicht vom Gegensatze positiver und negativer Größen in seiner Géométrie de Position.

Das Werk von L. N. M. Carnot Géométrie de Position, Paris 1803, wovon eine Uebersetzung von Schumacher in 2 Theilen 1810 herausgekommen, hat zum Zweck, die gewöhnliche arithmetische Theorie des Additionsgegensatzes als widersinnig darzustellen, und statt des Gebrauchs desselben in der Geometrie andre Methoden einzuführen, Methoden, deren Inbegriff eben durch die Benennung Géométrie de Position, Geometrie der Stellung, bezeichnet werden soll. Es ist keineswegs des Verfassers Zweck, sich hier in eine ausführliche Kritik dieses Werkes einzulassen, er will nur so kurz wie möglich zeigen, wie unrichtig die Ansichten vom Gegensatze positiver und negativer Größen und Zahlen sind, welche Carnot bei Abfassung dieses Werkes leiteten.

In einer ziemlich ausgedehnten vorläufigen Abhandlung bemüht sich Carnot, die Wi-

derſinnigkeit der gewöhnlichen Theorie dieſes Gegenſtandes darzuthun. So wenig nun auch der Verfaſſer die Abſicht haben kann, Alles zu vertheidigen, was man wol ſonſt über den Gegenſatz poſitiver und negativer Größen geſagt hat, und ſo wenig er auch die gewöhnliche Theorie in ihrem ganzen Umfange für gänzlich untadelhaft hält: ſo glaubt er doch dieſe Theorie gegen Carnot's Angriffe mit vollem Rechte in Schutz nehmen zu können. Gerade die Angriffe Carnot's auf die gewöhnliche Theorie des Additionsgegenſatzes möchten wol die ſchwächſte Seite ſeines Werkes ſeyn. Es wird wenig bedürfen, um dieſe Behauptung zu rechtfertigen.

Aus verſchiedenen einzelnen Bemerkungen glaubt Carnot darthun zu können, wie unhaltbar die gewöhnliche Theorie dieſes Gegenſatzes ſey. Allein gerade dieſe Bemerkungen fließen aus verkehrten Anſichten von der richtigen Theorie und andern elementaren Gegenſtänden der Arithmetik. Ganz vorzüglich auffallend ſind folgende:

Seite 10 im erſten Theile der Ueberſetzung heißt es: „Wenn zwei Quantitäten, eine poſi„tive und eine negative, gleich wirklich wären „und ſich nur durch ihre Stellung unterſchieden, „warum wäre die Wurzel der einen eine einge„bildete, die der andern eine wirkliche Quantität? „Warum ſollte $\sqrt{-a}$ nicht eben ſo wirklich als

„ $\sqrt{}$ a seyn? Kann man eine wirkliche Quanti„tät begreifen, deren Quadratwurzel man nicht „ausziehen könnte? Und woher käme das Privi„legium der ersten — a, ihr Zeichen dem ge„meinschaftlichen Producte — a × + a zu ge„ben? “

Ganz ähnlich heißt es S. 355 des 1sten Bandes der Uebersetzung in einem Auszuge aus einem besondern Mémoire von Carnot: „Wären die ne„gativen Quantitäten wirkliche Quantitäten, was „gibt ihnen bei der Multiplication das Vorrecht, „dem Producte ihr Zeichen zu geben? Warum „kann man nicht aus beiden die Quadratwurzel „ziehen? Warum soll die Quadratwurzel einer „Schuldforderung, einer Ordinate rechts von der „Axe genommen, eine wirkliche, die Quadratwur„zel einer Schuld, einer Ordinate links von der „Axe genommen, eine unmögliche Quantität seyn? „Noch mehr, da man es in seiner Gewalt hat, „die Seite der positiven Ordinaten zu bestimmen, „so kann man nach Belieben dasselbe Ding mög„lich oder unmöglich machen, und durch den Zau„berstab der Zeichen dem, was nicht seyn kann, „Existenz geben, und das, was existirt, unmöglich „machen. Gewiß, es ist den Geometern wol nie „eingefallen, daß sie so mächtig wären. “

Solche Bemerkungen sind doch gewiß sehr abgeschmackt, und fallen in Nichts zusammen, sobald

man nur den so wichtigen Unterschied zwischen Größe und Zahl gehörig gefaßt hat, sobald man weiß, daß man nicht Größen durch Größen multipliciren kann, daß es keine zweiten Potenzen und keine Quadratwurzeln von Größen, sondern bloß von Zahlen gibt. Wer hiemit im Reinen ist, dem kann es nicht einfallen, die Quadratwurzel aus einer links von der Axe genommenen Ordinate ziehen zu wollen u. s. w. So zeigt sich hier, wie groß der Vortheil ist, den man durch genaue Unterscheidung der Begriffe Größe und Zahl sich verschafft.

Nachdem Carnot durch solche und ähnliche Bemerkungen, die meistens eben nicht mehr Gehalt haben, und welche großentheils nur durch die Verwirrung der Begriffe Größe und Zahl einigen Schein gewinnen, die Falschheit der gewöhnlichen Theorie der positiven und negativen Größen dargethan zu haben glaubt, läßt er zuletzt doch die Regeln für die Rechnung mit denselben gelten, ohne deutlich zu entwickeln, was man sich denn nun eigentlich unter jenen Größen vorstellen soll. So steht also sein Werk mit sich selbst im Widerspruche, und man kann wol Carnot selbst zu den „geschickten Leuten" rechnen, die, wie sich d'Alembert ausdrückt, (siehe Geometrie der Stellung I. S. 5.) „dazu beigetragen haben, den Begriff der negati-

ven Größen durch nicht genaue Begriffe, die sie davon geben, zu verwirren."

Die Vorwürfe, welche Carnot der gewöhnlichen Anwendung der negativen Größen in der Geometrie macht, fallen auch meistens, sobald man die Sache nicht aus dem falschen Gesichtspuncte Carnot's ansieht. Zwar einige Einwendungen, die er macht, daß nämlich nicht selten bei der algebraischen Behandlung geometrischer Aufgaben von den verschiedenen Werthen der zuletzt gefundenen Formel einer oder einige, zuweilen selbst positive, verworfen werden müssen, daß manchmal negative Werthe nicht durch Linien in entgegengesetzter Richtung dargestellt werden müßten, haben vollkommene Richtigkeit, aber deßhalb ist nicht gleich die gewöhnliche Theorie durchaus zu verwerfen, sie will nur mit Vorsicht angewandt seyn; und selbst einige besondre Beispiele, die Carnot hiefür anführt, sind im gegenwärtigen Werke, wol auf eine befriedigende Weise, schon behandelt worden (§. 24. Beisp. III., §. 30. Beisp. IX.), andre, die im Vorigen nicht gelöst worden sind, verlieren auch ihre Räthselhaftigkeit, sobald man die aufgestellten Grundsätze gehörig anzuwenden weiß.

Endlich, nachdem er genug gegen die gewöhnlichen Ansichten gestritten hat, stellt Carnot eine neue Theorie der entgegengesetzten Größen, aber eigentlich nur in Hinsicht ihres Gebrauchs in der

Geometrie auf. Statt der Benennungen positiv und negativ sagt er direct und invers. Dann verlangt er, bei der Betrachtung von Constructen, welche sich bloß in der Lage einzelner Theile unterscheiden, zuerst die Beziehungen der einzelnen correspondirenden Theile dieser Constructe in Tafeln zu bringen, so wie auch zu überlegen, welche Größen, in Bezug auf das zu Grunde gelegte Construct, bei dem andern direct geblieben, oder invers geworden sind; oder er verlangt, nach seiner Art sich auszudrücken, Tafeln für die Correlation der Construction, der Zeichen oder der Stellung, überhaupt für die Correlation der Figur zu entwerfen. Wenn nun schon nicht dieses Alles verwerflich seyn mag, so fällt doch seine Theorie der directen und inversen Größen am Ende mit einer vernünftigen Theorie der positiven und negativen zusammen; und eine richtige Theorie der Anwendung des Additionsgegensatzes bei der Betrachtung verwickelter Figuren, mit verschiedenen Lagen der einzelnen Theile, fordert auch Ueberlegungen, welche zuletzt mit denen, die in den aufgestellten Tafeln der Correlation enthalten sind, auf Eins hinaus kommen.

Zwar enthält Carnot's Werk, besonders in der letztern Hälfte, einen Reichthum interessanter geometrischer Untersuchungen, woran man den tüchtigen Mathematiker erkennt, und das Studium des-

selben mag deßhalb sehr lehrreich seyn; aber so vorzüglich es auch von dieser Seite seyn mag, so kann man doch gewiß dreist behaupten, daß es seinen Zweck, die gewöhnliche Theorie des Gegensatzes positiver und negativer Größen umzustoßen, und dafür eine richtige zu gründen, gänzlich verfehlt hat.

Anhang II.

Auflösung der Aufgabe, aus den Höhen eines Dreiecks die Seiten zu berechnen.

Im §. 20 war die Rede von mehreren Formeln, welche den Zusammenhang der drei Seiten eines Dreiecks, der Abschnitte, die auf seinen Seiten durch die Höhen gebildet werden, der Höhen selbst und des Flächenraums betreffen. Diese Formeln wurden dort nicht abgeleitet, sondern als bekannt vorausgesetzt. Die Ableitung der Formeln für die Höhen und den Flächenraum aus den Seiten des Dreiecks findet man gewöhnlich in der Trigonometrie; man kann bei derselben aber auch den Gebrauch der trigonometrischen Functionen ganz vermeiden.

Nur die in jenem § zuletzt gegebenen Formeln zur Auflösung der Aufgabe, aus den drei gegebenen Höhen eines Dreiecks seine drei Seiten zu berechnen, hat der Verfasser noch nirgends gefunden, so wenig wie irgend eine andre Auflösung dieser Aufgabe. Es scheint ihm daher nicht überflüssig, zu zeigen, wie

er diese Auflösung vermittelst eines geringen Kunstgriffes gefunden hat.

Das gesuchte Dreieck, von dem bloß die Höhen bekannt sind, werde bezeichnet durch d;

seine Höhen sollen heißen b', b'', b'''

seine gesuchten Seiten a', a'', a'''.

sein unbekannter Flächenraum S.

Man weiß, daß die drei Producte, welche durch Multiplication einer Seite eines Dreiecks mit der zugehörigen Höhe gebildet werden können, alle einander gleich sind, indem jedes den doppelten Flächenraum des Dreiecks gibt.

Es ist $a'b' = a''b'' = a'''b''' = 2S$

Daher $a' = \frac{2S}{b'} = \frac{2S \cdot b''b'''}{b'b''b'''} = \frac{2S}{b'b''b'''} \cdot b''b'''$

eben so $a'' = \frac{2S}{b'b''b'''} \cdot b'b'''$.

$a''' = \frac{2S}{b'b''b'''} \cdot b'b''$

Hier ist $\frac{2S}{b'b''b'''}$ unbekannt; es heiße N, so ist

$a' = N \cdot b''b'''$

$a'' = N \cdot b'b'''$

$a''' = N \cdot b'b''$.

Kennte man nur die Zahl N, so wären die Seiten a', a'', a''' nach diesen Gleichungen sogleich bekannt.

Die drei Zahlen a', a'', a''' verhalten sich nach eben diesen Gleichungen unter sich so, wie die drei Zahlen $b''b'''$, $b'b'''$, $b'b''$. Construirte man also ein Dreieck, es heiße D, dessen drei Seiten durch $b''b'''$, $b'b'''$, $b'b''$ ausgedrückt würden, so wäre dieses dem Dreiecke d, dessen Seiten eben gesucht werden, ähnlich. Nun mögen in D heißen

die Seiten $A' = b''b'''$,
$A'' = b'b'''$,
$A''' = b'b''$,
die Höhen B'
B''
B'''
der Flächenraum M.

Dann ist, weil $\triangle D \sim \triangle d$,

$$B' : A' = b' : a'$$

also $$a' = \frac{b'A'}{B'} = \frac{b'b''b'''}{B'}$$

Es kommt also jetzt nur noch darauf an, B' zu kennen; man erhält es aber, wenn man berechnet

$$A' + A'' + A''' = b''b''' + b'b''' + b'b'' = L$$

dann den Flächenraum von D

$$M = \sqrt{\tfrac{1}{2}L \,.\, (\tfrac{1}{2}L - b''b''') \,.\, (\tfrac{1}{2}L - b'b''') \,.\, (\tfrac{1}{2}L - b'b'')}$$

dann ist seine Höhe $B' = \dfrac{2M}{A'} = \dfrac{2M}{b''b'''}$

also $a' = b'b''b''' : \frac{2M}{b''b'''} = \frac{b'b''b'''}{2M} . b''b'''$

Hieraus ergibt sich, daß das obige $N = \frac{b'b''b'''}{2M}$, und folglich

$$a'' = N . b'b''' = \frac{b'b''b'''}{2M} . b'b'''$$

$$a''' = N . b'b'' = \frac{b'b''b'''}{2M} . b'b''$$

So sind also die oben gegebenen Vorschriften für die Rechnung vollkommen richtig.

Da $N = \frac{2S}{b'b''b'''}$

so ist der Flächenraum des Dreiecks,

$$S = \frac{N . b'b''b'''}{2} = \frac{b'^2 b''^2 b'''^2}{4M}.$$

Exempel.

Es sey $b' = 2$, $b'' = 3$, $b''' = 4$

so hat man $L = 12 + 8 + 6 = 26$

$$M = \sqrt{13 . 1 . 5 . 7} = \sqrt{455}$$

$$N = \frac{2 . 3 . 4}{2 . \sqrt{455}} = \frac{12}{\sqrt{455}}$$

$$\doteq 0{,}562568677..$$

also $a' = N . 12 = 6{,}750824$

$a'' = N . 8 = 4{,}500549$

$a''' = N . 6 = 3{,}375412$

$$S = N . 12 \text{ oder } = \frac{a' . b'}{2} = 6{,}750824$$

Noch mag über diese Aufgabe folgendes bemerkt werden:

Für die Zahlen a′, a″, a‴, welche die drei Seiten eines Dreiecks ausdrücken sollen, hat man die Bedingung, daß die Summe von zweien dieser Zahlen immer größer seyn müsse, als die dritte. Man kann fragen, ob es nicht auch eine arithmetische Bedingung gebe, der die Zahlen b′, b″, b‴ für die Höhen Genüge leisten müssen, wenn ein Dreieck mit diesen Höhen möglich seyn soll.

Für die Höhen b′, b″, b‴ sind die Seiten des Dreiecks

$$N \,.\, b''b''', \quad N \,.\, b'b''', \quad N \,.\, b'b'',$$

es muß also die Summe von zweien dieser Ausdrücke immer größer seyn, als die dritte. Man denke nun, es sey b′ und b″ gegeben, und b″ sey größer als b′, so ergibt sich:

1) b‴ muß kleiner seyn, als $\frac{b'b''}{b''-b'}$.

Denn es soll

$$N \,.\, b'b''' + N \,.\, b'b'' > N \,.\, b''b''' \text{ seyn,}$$

also $b'b''' + b'b'' > b''b'''$

oder $b''b''' - b'b''' < b'b''$

$$(b''-b') \,.\, b''' < b'b''$$

$$\text{mithin } b''' < \frac{b'b''}{b''-b'}.$$

2) b''' muß größer seyn als $\frac{b'b''}{b'+b''}$.

Denn es soll

$$N.b'b''' + N.b''b''' > N.b'b'' \text{ seyn}$$

$$\text{also } b'b''' + b''b''' > b'b''$$

$$\text{und } b''' > \frac{b'b''}{b'+b''}$$

b''' muß also immer in die Gränzen $\frac{b'b''}{b''-b'}$ und $\frac{b'b''}{b'+b''}$ eingeschlossen seyn.

Z. B. für $b' = 2$, $b'' = 3$ muß b''' größer als $\frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$ und kleiner als $\frac{6}{1} = 6$ seyn.

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

Verbesserungen.

Seite VII. Zeile 3 v. u. st. nur l. und.

— 9. — 9 st. erstanden l. verstanden.

— 13. — 8 v. u. st. hebe l. habe.

— 14. — 8 v. u. st. $+5$ l. $+\overline{5}$.

— 36. — 13 st. multiplicantiv l. multiplicativ.

— 48. — 7 v. u. st. $A''B$ l. $A'B'$.

— 83. — 8 v. u. st. heben l. haben.

— 85. — 4 st. A l. A'.

— 92. — 8 v. u. st. A l. A''.

— — — 1 v. u. st. $2a'^2 a''^2$ l. $2a'^2 a''''^2$.

— 98. — 7 st. $a^2 3b^2$ l. $a^2 - 3b^2$.

— 103. — 1 st. Linie l. Linien.

— 107. — 8 st. $\triangle Cdm : \triangle ABC$ l. $\triangle Cdm : \triangle ABd$.

— 113. — 2 v. u. st. rets l. rechts.

— 119. — 5 v. u. st. §. 14. l. §. 28.

— 121. — 7 st. $D'C' = DC$ l. $P'C' = PC$.

— 124. — 13 st. $+x$ l. $+\infty$

— 140. — 9 v. u.

$$\text{st. } y = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-3+4} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

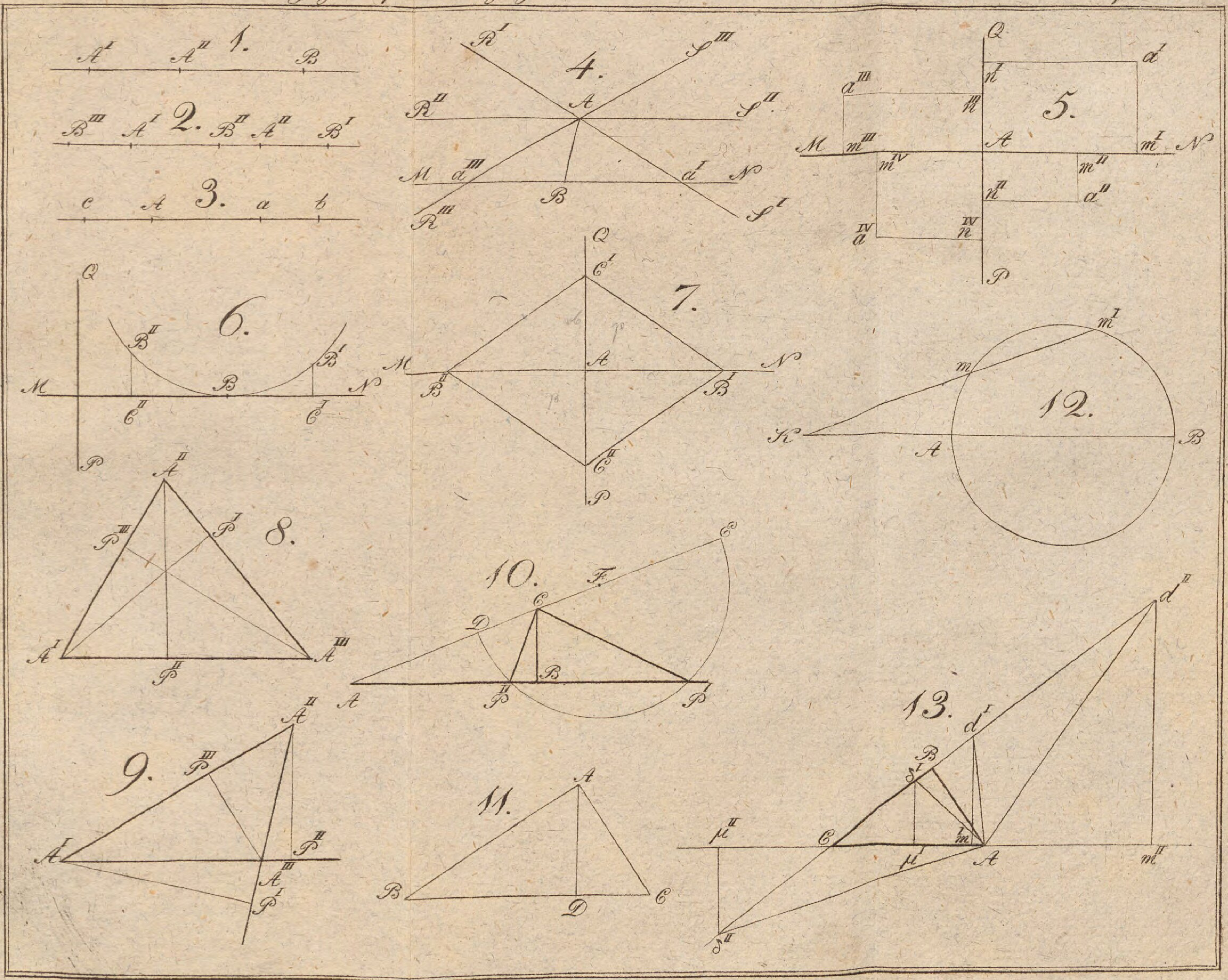
$$\text{l. } y = -1 + 2 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-12+16} = 1 \pm 1 = \begin{cases} 2. \\ 0 \end{cases}$$

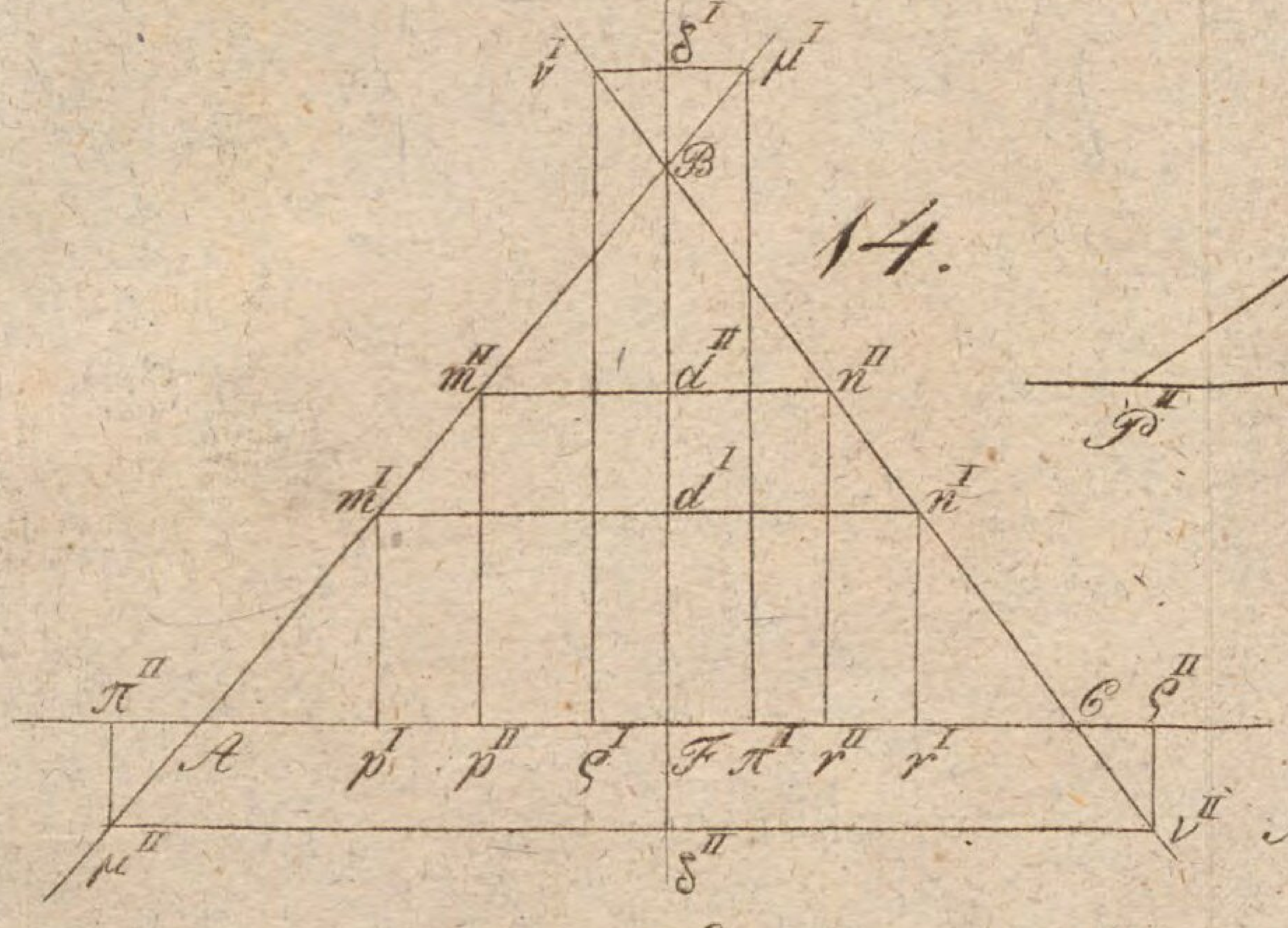
— 149. Zeile 5 v. u. st. $\sin\varphi$ l. $-\sin\varphi$.

— 152. — 7 v. u. st. 0 l. $\pm\infty$.

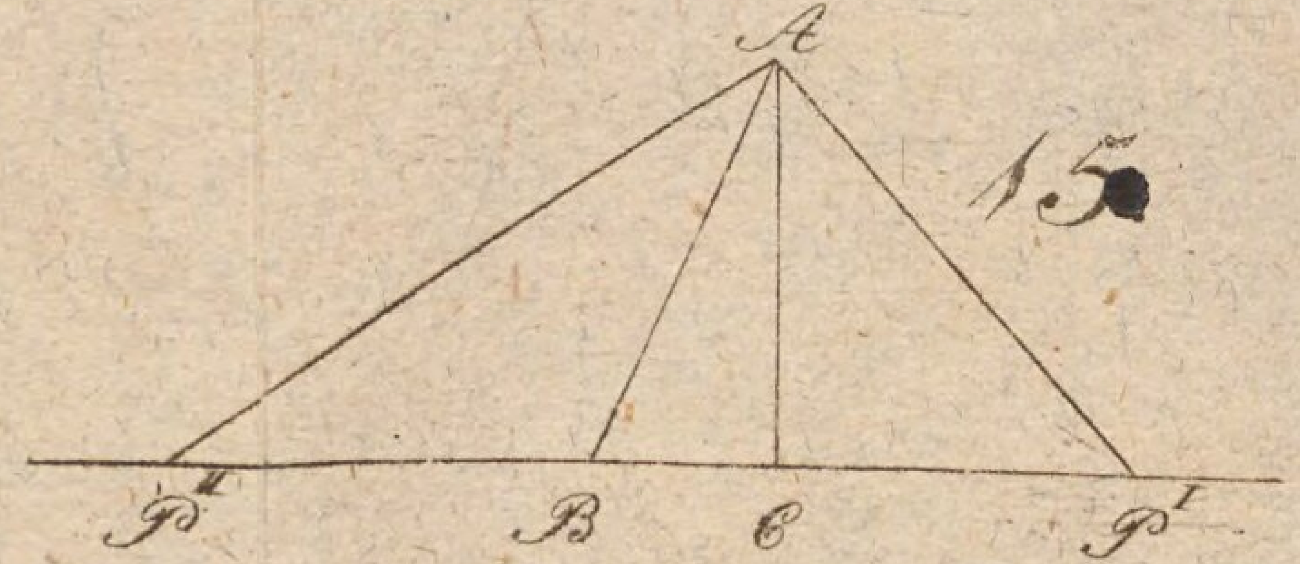
— 154. — 13 v. u. st. 19 l. 18.

Außer diesen Druckfehlern steht noch, ganz ohne die Schuld des Verfassers, von S. 81 an immer Pythagoräisch statt Pythagorisch. Auch hat man sich sonst noch beim Drucke verschiedene Aenderungen der Orthographie erlaubt, worauf aber weniger ankommt.

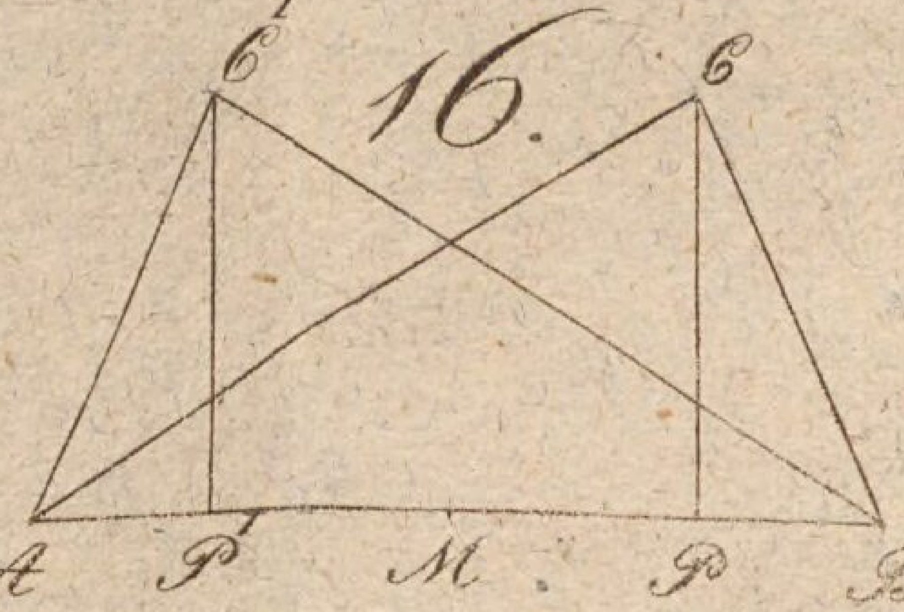

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.



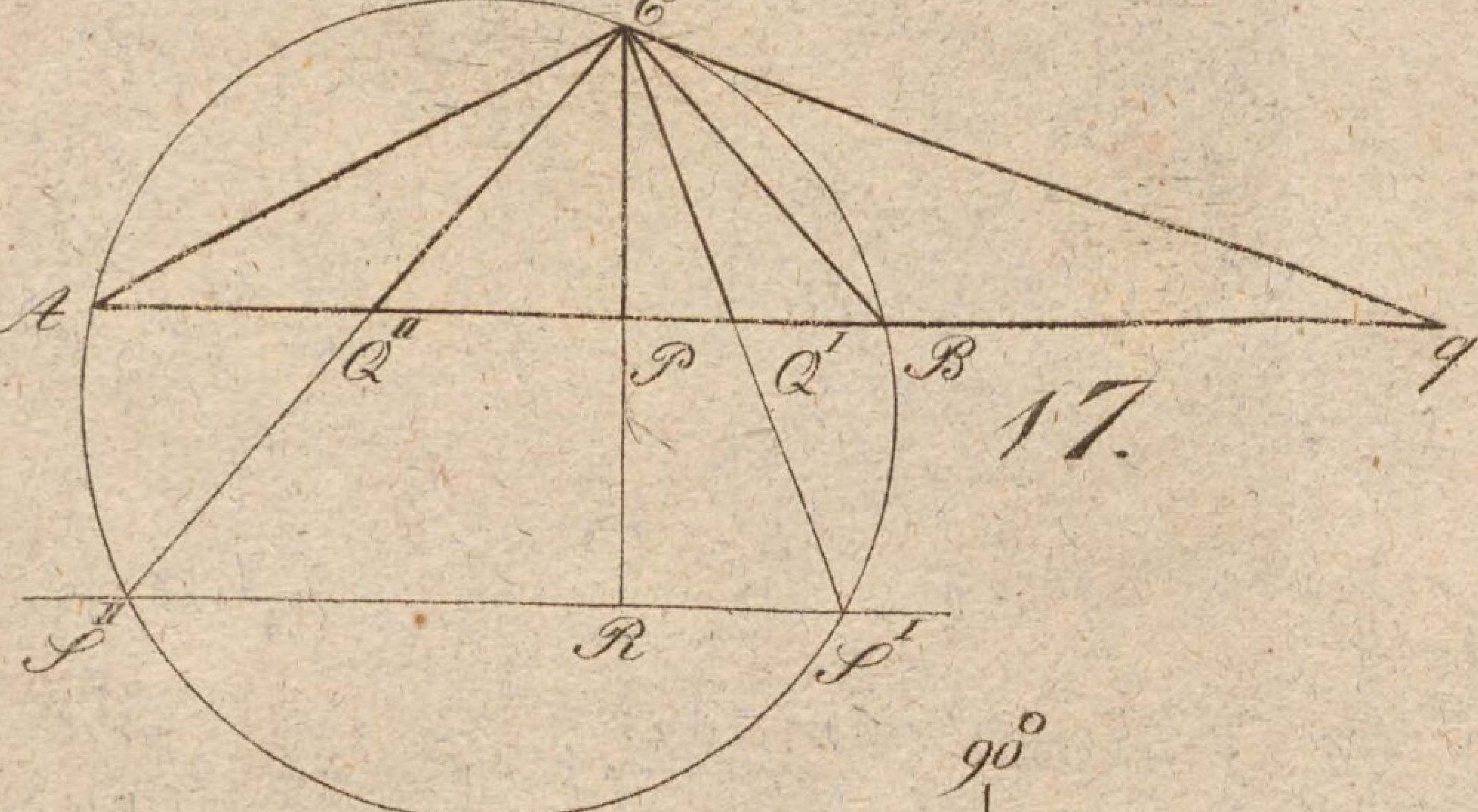
14.



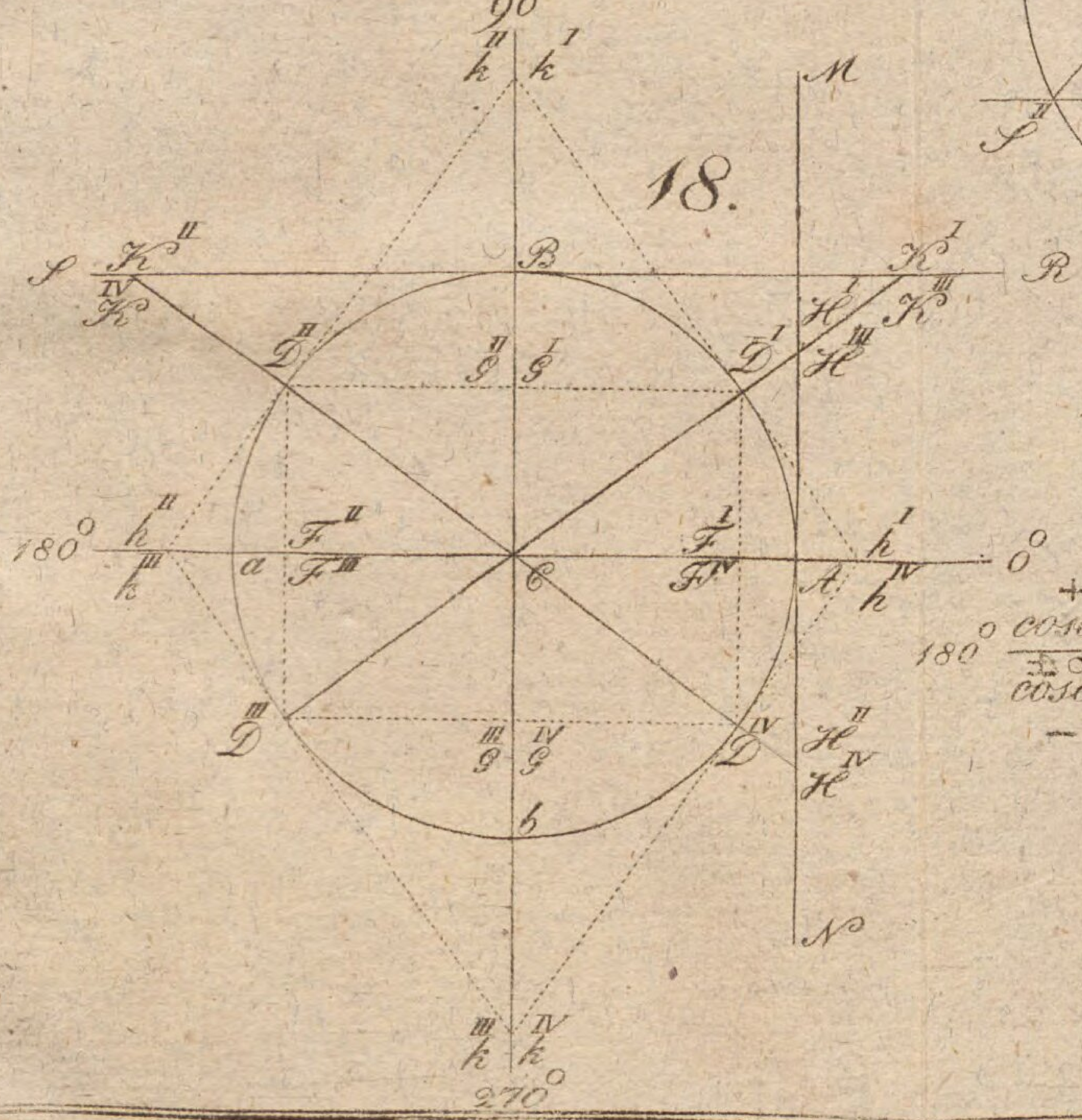
15.



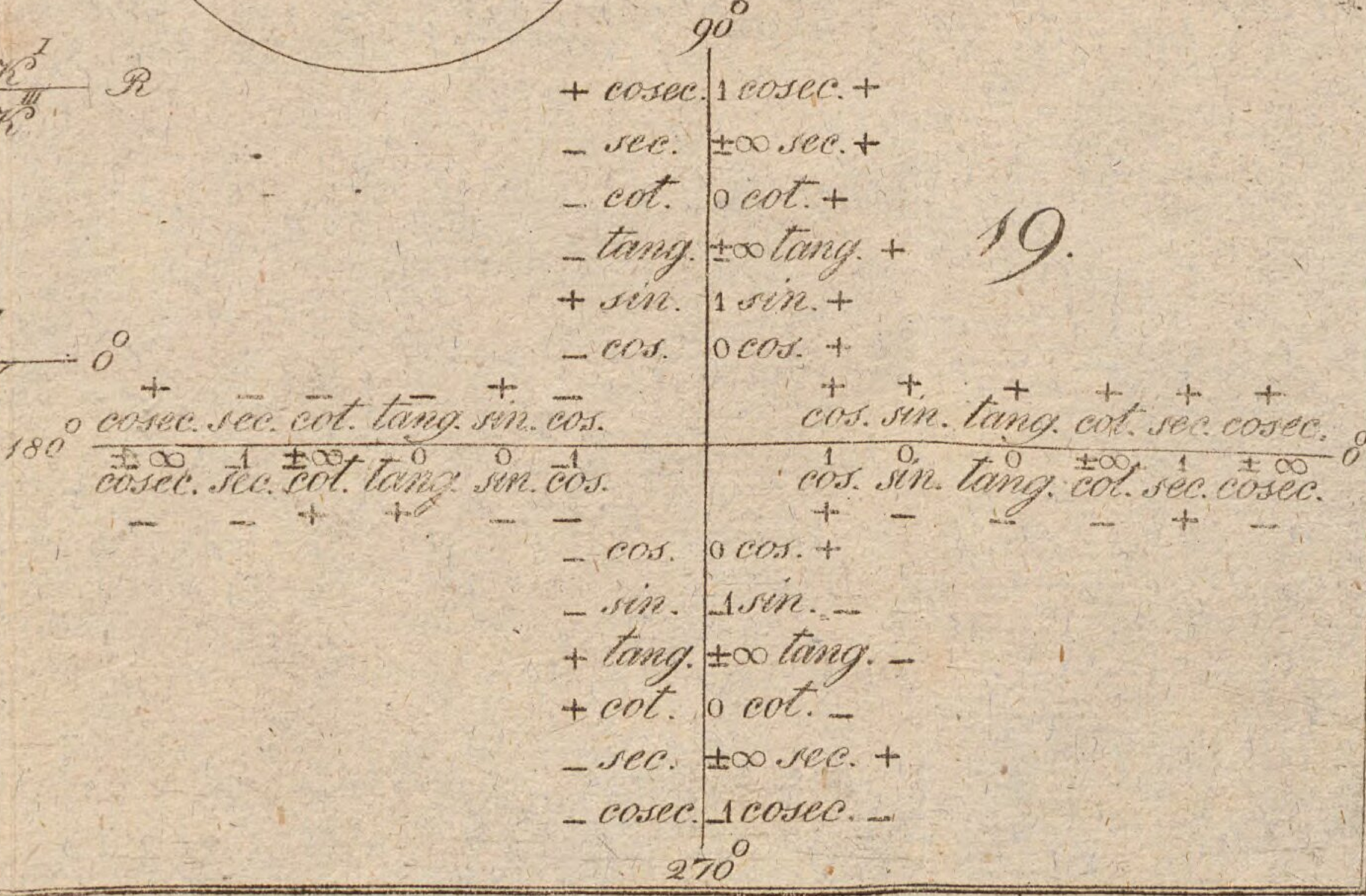
16.



17.



18.



19.

22.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Förstemann, Wilhelm August,

Über den Gegensatz positiver und negativer Größen

Nordhausen 1817

Math.u. 62 h
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10593801-7